TD 2 : Graphes

EXERCICE 1 Trouver une relation entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes. En déduire qu'il est impossible d'organiser une rencontre entre cinq équipes de coinche où chaque équipe joue exactement trois fois contre les autres.

EXERCICE 2 Montrer que dans la classe il y a nécessairement au moins deux élèves qui ont salué le même nombre de camarades ce matin.

EXERCICE 3 Montrer que dans un graphe $G = (S, A)$, s'il existe un chemin entre x et y, alors il existe un chemin simple entre x et y.

EXERCICE 4 Montrer que dans un graphe non-orienté *est accessible depuis* est une relation d'équivalence sur les sommets. Est-ce encore vrai pour un graphe orienté ?

EXERCICE 5 Montrer qu'un graphe (S, A) non-orienté et connexe vérifie $|A| \geq |S| - 1$.

EXERCICE 6 Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté dont le degré de chaque sommet est au moins $\frac{|S|-1}{2}$. Montrer que G est connexe.

EXERCICE 7 Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté non vide. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre
2. Deux sommets quelconques de G sont reliés par un unique chemin simple
3. G est connexe, mais retirer une arête quelconque à A rend le graphe non connexe.
4. G est connexe et $|A| = |S| - 1$
5. G est acyclique et $|A| = |S| - 1$
6. G est acyclique, mais rajouter une arête quelconque à A apporte un cycle.

EXERCICE 8 Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté contenant un sommet s_0 tel qu'il existe un chemin unique entre s_0 et chaque sommet $s \in S$. Montrer que la version non-orienté de G forme un arbre.

EXERCICE 9 Montrer qu'un arbre couvrant est un sous-graphe acyclique maximal et un sous-graphe couvrant connexe minimal.

EXERCICE 10 Un graphe non-orienté est dit d-régulier si tous ses sommets ont même degré d. Dans cet exercice on s'intéresse aux graphes 3-réguliers.

1. Que dire du nombre de sommets d'un tel graphe ?
2. Montrer que $\forall p \geq 2$, il existe un graphe 3-régulier à $2p$ sommets.

EXERCICE 11 (*Landeau 1953*) On appelle *tournoi* un graphe orienté $G = (S, A)$ tel qu'entre deux sommets il existe toujours exactement un arc. On dit qu'un sommet x d'un tournoi domine y si $(x, y) \in A$. On dit qu'un sommet x est *roi* si pour tout $y \in S$:

— soit x domine y ;

— soit il existe un sommet z tel que x domine z et z domine y.

Montrer que dans un tournoi, il existe toujours un roi.

EXERCICE 12 Montrer que dans un groupe de 6 personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissement pas (on suppose que *se connaître* est symétrique). Est-ce encore vrai dans un groupe de cinq personnes ?

EXERCICE 13 On dit qu'un graphe est c-coloriable si l'on peut attribuer une couleur parmi c couleurs à chaque sommet de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Par exemple, le graphe complet à trois sommets K_3 n'est pas 2-coloriable. Tout graphe contenant K_3 ne l'est donc pas non plus.

1. Construire un graphe ne contenant pas K_3 mais qui ne soit pas 2-coloriable.
2. Construire un graphe ne contenant pas K_4 mais qui ne soit pas 3-coloriable.
3. Construire un graphe ne contenant pas K_n mais qui ne soit pas $(n-1)$-coloriable.

EXERCICE 14 Exprimer la résolution d'un Sudoku en terme de coloration de graphe. Décrire le graphe, son nombre de sommets, d'arêtes et le nombre de couleurs utilisées.

EXERCICE 15 (*Théorème de Ore*) Un chemin *hamiltonien* est un chemin simple passant exactement une fois par chaque sommet. On veut montrer que pour tout graphe $G = (S, A)$, ayant $n = |S| \geq 3$ sommets et tel que pour tout $u, v \in S$, tels que $\{u, v\} \notin A, \deg(u) + \deg(v) \geq n$ possède un cycle hamiltonien.

1. Montrer que si G ne possède pas de cycle hamiltonien, alors il existe un graphe $H = (S, A')$, dont G est un sous-graphe, tel que si on ajoute une arête à H, alors H a un cycle hamiltonien.
2. Montrer que H possède un chemin hamiltonien $(v_1, \dots v_n)$.
3. Montrer qu'il existe un entier $1 < i < n$ tel que $(v_1, v_i) \in A$ et $(v_{i-1}, v_n) \in A$.
4. En déduire que H possède un cycle hamiltonien dans G et conclure.