

TD 4 : Langages rationnels et locaux

EXERCICE 1 La hauteur d'étoile d'une expression rationnelle e est l'entier $h(e)$ défini récursivement par :

- $h(\emptyset) = 0$
- $h(\epsilon) = 0$
- $\forall a \in \Sigma, h(a) = 0$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}(\Sigma), h(e|f) = \max(h(e_1), h(e_2))$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}(\Sigma), h(e \cdot f) = \max(h(e_1), h(e_2))$
- $\forall e \in \mathcal{E}(\Sigma), h(e^*) = h(e) + 1$

Écrire une fonction `hauteur_etoile` : `regexp -> int` qui renvoie la hauteur d'étoile d'une expression rationnelle.

EXERCICE 2 $\Sigma = \{a, b\}$. Montrer que $L = \{a^n b, n \geq 3\}$ est rationnel.

EXERCICE 3 Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, expliquer avec des mots ce que sont les langages dénotés par :

- | | | |
|-------------|------------------------|------------------------|
| 1. a^*b^* | 3. $(a b)^*aaa(a b)^*$ | 5. $\epsilon (a+b)^*b$ |
| 2. $(ab)^*$ | 4. $(a ba)^*$ | |

Parmi ceux-ci, lesquels sont également dénotés par :

- | | |
|------------------------|--------------|
| 1. $\epsilon a(ba)^*b$ | 2. $(a^*)^*$ |
|------------------------|--------------|

EXERCICE 4 Montrer que si $L(e)$ est non vide, il est possible de choisir e sans utiliser \emptyset .

EXERCICE 5 (<https://regexcrossword.com>) Remplir la grille avec un caractère par case de manière à ce que chaque mot, lu horizontalement ou verticalement, appartienne à l'expression dénoté par l'expression régulière correspondante.

	$(b q w)(pr le)$	$(r a n k)^+$
$(a w e)^+$		
$(a l p)^+k$		
$(pr er ep)$		

EXERCICE 6 Montrer que $(a|b)^*$, $(a^*)^*a^*$ et $(a^*)^*|(b^*)^*$ sont équivalentes.

EXERCICE 7 Donner une expression rationnelle représentant le complément de $(a|b)^*b$ et de $((a|b)(a|b))^*$.

EXERCICE 8 Donner une expression rationnelle dénotant l'ensemble des mots sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ comportant exactement deux a , dans lesquels tout b est suivi d'au moins deux c et qui se terminent par a .

EXERCICE 9 (Vrai ou Faux ?)

1. Le langage a^*bc^* est local.
2. Le langage a^*ba^* est local.
3. Un langage régulier est local.
4. Soit L un langage local sur Σ , $a \in \Sigma$, $u, u', v, v' \in \Sigma^*$, avec $uav, u'av' \in L$. Alors $uxv' \in L$.

EXERCICE 10

1. Montrer que l'intersection et l'étoile de Kleene d'un langage local est un langage local.
2. Montrer que la réunion et la concaténation de deux langages locaux utilisant des ensembles de caractères disjoints est locale.
3. Le résultat est-il encore vrai sans l'hypothèse d'alphabets disjoints ?
4. Montrer que le langage associé à une expression rationnelle linéaire est local.

EXERCICE 11 (Algorithmes de calculs de P , S et F)

1. Écrire une fonction `contient_mot_vide` : `regexp -> bool` qui détermine si le mot vide appartient au langage dénoté par une expression rationnelle.
2. Écrire les fonctions `suffixe` : `regexp -> string list` et `prefixe` : `regexp -> string list` qui calculent les ensembles P et S d'un langage.
3. Écrire une fonction `produit_carthesien` : `'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list`
4. En déduire une fonction `facteur` : `regexp -> string list` qui calcul l'ensemble F .