TD 5 : Automates

1 Automates déterministes

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$ un automate fini déterministe. Quel est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0, T', \delta)$ où T' est l'ensemble des états co-accessibles dans $\mathcal{A}$?

EXERCICE 2 Proposer des automates finis déterministes reconnaissant :

- les représentations binaires des nombres pairs ;
- le langage des mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et impair de b.
- les représentations décimales des multiples de 3 ;
- les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 1 modulo 3.

Pour chacun de ces langages, proposer également un automate déterministe complet, un automate standard et un automate émondé les reconnaissant.

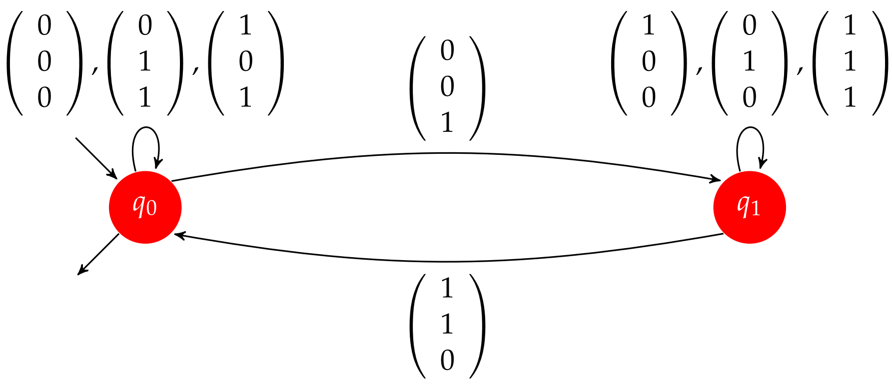
EXERCICE 3 Soit $u \in \Sigma^*$ et notons $\mathrm{Pref}(u) \subset \Sigma^*$ le langage des préfixes de u.

1. Déterminer le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A} = (\mathrm{Pref}(u), \Sigma, \epsilon, \{u\}, \delta)$ où l'application δ est définie pour tout $v \in \mathrm{Pref}(u), a \in \Sigma$ par $\delta(v, a)$ étant le plus long suffixe de va appartenant à $\mathrm{Pref}(u)$.
2. Adapter l'automate précédent pour qu'il reconnaisse les mots dont u est facteur.

EXERCICE 4

Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe à n états. Montrer que si $L(\mathcal{A})$ est non vide, alors il contient au moins un mot de longueur au plus $n - 1$.

EXERCICE 5 On prétend que l'automate ci-dessous permet d'accepter les nombres $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $z = x + y$.



Expliquer. Proposer un automate qui reconnaît les nombres $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x < y$.

2 Automates non déterministes et déterminisation

EXERCICE 6 (*Recherche d'une chaîne de caractères*) On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Proposer un automate non déterministe qui reconnaît $\Sigma^* aba \Sigma^*$.
2. Déterminiser l'automate précédent.
3. Trouver un automate déterministe reconnaissant $\Sigma^* aba \Sigma^*$ comportant seulement quatre états.

EXERCICE 7

Trouver un langage non déterministe qui reconnaît le langage des suffixes de *baba* puis le déterminiser.

EXERCICE 8 (*Nombre minimal d'états d'un déterminisé*) Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On considère le langage $L = \Sigma^* a \Sigma^{n-1}$.

1. Proposer un automate non déterministe qui reconnaît L.
2. Montrer que tout automate déterministe qui reconnaît L possède au moins 2^n états.

3 Automates locaux

Définition 1. *Un automate fini $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$ est dit* local *si pour tout $a \in \Sigma$ il existe un état $q_a \in Q$, tel que $\forall q' \in Q$, soit $\delta(q', a)$ n'est pas défini (i.e. est un blocage) soit $\delta(q', a) = q_a$.*

EXERCICE 9 (*Automates et langages locaux*)

1. Montrer que tout langage local est reconnu par un automate local.
2. En déduire que tout langage associé à une expression rationnelle linéaire est reconnaissable par un automate local.
3. Trouver un automate local reconnaissant le langage associé à l'expression rationnelle linéaire $(a|b)^*c$ sur $\Sigma = \{a, b, c\}$.

4 Propriétés de clôture des langages reconnaissables

EXERCICE 10 Montrer que le complémentaire d'un langage reconnaissable est reconnaissable.

EXERCICE 11

1. Montrer que la différence ensembliste de deux langages reconnaissables est reconnaissable.
2. En déduire une méthode pour déterminer si deux langages reconnaissables sont égaux.

EXERCICE 12

Pour $L \subset \Sigma^*$ le miroir de L est le langage $\widetilde{L} = \{a_n \dots a_1 | a_1 \dots a_n \in L\}$ formé des miroirs de mots de L. Montrer que le miroir d'un langage reconnaissable est reconnaissable.

5 Constructions de Glushkov

EXERCICE 13

Déterminer l'automate de Glushkov associé à l'expression rationnelle $a(a|b)^*a$.

6 Lemme de l'étoile

EXERCICE 14 Parmi les langages suivants, lesquels sont rationnels ? Justifier vos réponses.

1. $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n a^{m+n} \mid (m, n) \in \mathbb{N}\}$
3. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs.
4. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b
5. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.
6. $\{uv\widetilde{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\widetilde{u}$ désigne le miroir de u.
7. $\{u\widetilde{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$
8. $\{a^i b^j \mid pgcd(i, j) = 1\}$
9. $\{a^i b^j \mid i \geq j \geq 0\}$