DM n° 3

À rendre pour le jeudi 1er décembre.

Les deux parties sont entièrement indépendantes. Pour les tracés, on utilisera des feuilles à petits carreaux ou du papier millimétré.

A Norme subordonnée et mesure de Lozinskiĭ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. On pose $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1\}$ et $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1\}$.

I Norme subordonnée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.1) Montrer que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

I.2) Montrer que

$$\sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\| = \sup_{x\in\mathcal{S}} \|Ax\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} |||\cdot||| : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & A & \longmapsto & |||A||| = \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\| \end{array}$$

I.3) Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cette norme s'appelle la *norme subordonnée* à $\|\cdot\|$.

I.4) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathcal{S}$ tel que $|||A||| = \|Ax_0\|$.

I.5) Montrer que $|||I_n||| = 1$.

I.6) Établir que $\|Ax\| \leq |||A|||\,\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.7) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$|||A||| - |||B||| \leq |||A - B||| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||.$$

II Mesure de Lozinskiĭ

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette section de montrer l'existence du réel

$$\mu(A) = \lim_{u\to 0^+} \left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u} \right)$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiĭ de A (il dépend du choix de la norme initiale).

Pour $u > 0$, on note $\mu(A, u) = \dfrac{|||I_n + uA||| - 1}{u}$.

II.1) Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = |||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| - (u^{-1} - v^{-1})$$

II.2) En déduire que si $0 < u \leq v$, alors $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq 0$.

II.3) Vérifier que pour tout $u > 0$, on a $-|||A||| \leq \mu(A, u) \leq |||A|||$.

II.4) En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim_{u\to 0^+}(\mu(A, u))$.

B Des courbes pour la lettre $\mathcal{C}$

On note $\mathcal{C}$ l'image dans $\mathbb{R}^2$ de l'application

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \end{array}$$

I Topologie de $\mathcal{C}$

I.1) Étudier et représenter $\mathcal{C}$.

I.2) Préciser les propriétés topologiques suivantes de $\mathcal{C}$:

(a) Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

(b) Est-ce un fermé de $\mathbb{R}^2$?

(c) Est-ce une partie bornée de $\mathbb{R}^2$?

(d) Est-ce une partie convexe de $\mathbb{R}^2$?

II Paramétrisation complexe de $\mathcal{C}$

On va chercher une paramétrisation complexe de $\mathcal{C}$ de la forme

$$z : \begin{array}{rcl} \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \rho(t)e^{i\theta(t)} \end{array}$$

où $\rho : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^+$ et $\theta : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ sont deux applications continues.

II.1) Calculer $\rho(t)$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

II.2) Étudier et représenter la courbe $\mathcal{E}$, image dans $\mathbb{R}^2$ de l'application

$$\phi : \begin{array}{rcl} \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \rho(t)e^{it} \end{array}$$

On pourra s'aider de la calculatrice.

II.3) À partir de l'expression de $\gamma(t)$, calculer $\tan\theta(t)$.

II.4) Représenter la fonction $t \mapsto \arctan(2\tan t)$ sur la partie de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ sur laquelle cette fonction est définie.

II.5) Modifier cette fonction pour déterminer la fonction continue θ cherchée.

II.6) Vérifier le résultat obtenu à la question précédente en représentant la courbe paramétrée z. On pourra s'aider de la calculatrice.

II.7) Écrire un programme PYTHON permettant d'obtenir ce tracé.

III Une famille de courbes pour la lettre $\mathcal{C}$

Dans cette section on va construire une famille de courbes donnant un aspect visuel différent de la lettre $\mathcal{C}$. Dans ce qui suit, la notation $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

On définit les applications

$$\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n,t) & \longmapsto & \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{2n} E\left(\dfrac{2n}{3\pi}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) \end{array}$$

$$\omega : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n,t) & \longmapsto & \cos^2\left(\dfrac{2n}{3}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) \end{array}$$

III.1) Étudier rapidement α et ω, puis représenter sur un même graphique les fonctions $t \mapsto \alpha(10,t)$ et $t \mapsto \omega(10,t)$.

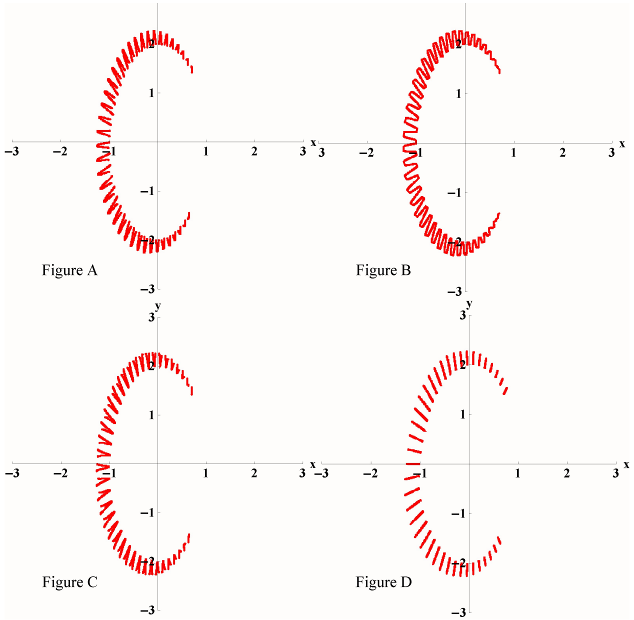
III.2) Étudier et représenter la fonction

$$\psi : \begin{array}{rcl} \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{2}{3}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) \end{array}$$

III.3) On définit la fonction

$$\zeta : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^* \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (n,t) & \longmapsto & \rho(t)\left(1 + \psi(t)\omega(n,t)\right)e^{i\theta(\alpha(n,t))} \end{array}$$

On a représenté ci-dessous cette courbe pour $n = 40$, mais la courbe a été mélangée avec d'autres courbes représentant la lettre $\mathcal{C}$. Identifier lequel des quatre graphiques représente la fonction $t \mapsto \zeta(40,t)$ et expliquer pourquoi.



III.4) Écrire un programme PYTHON permettant de créer la séquence des 100 premières courbes (on pourra même faire une animation).