DM n° 3 : corrigé

Pour la plupart des questions, seule une indication, une piste ou une solution succincte est donnée. Certaines réponses, indiquées par le symbole ⊛, sont rédigées conformément à ce qui serait attendu.

A Norme subordonnée et mesure de Lozinskiĭ

I Norme subordonnée

I.1) ⊛ L'application $x \mapsto Ax$ est linéaire donc continue (et même lipchitzienne) sur $\mathbb{K}^n$ qui est de dimension finie. La norme est 1-lipchitzienne et donc continue. Par composition de fonctions continues, $x \mapsto \|Ax\|$ est donc continue (et même lipchitzienne).

I.2) On veut montrer que

$$\overbrace{\sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\|}^{\alpha} = \overbrace{\sup_{x\in\mathcal{S}} \|Ax\|}^{\beta} = \overbrace{\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}^{\gamma}$$

Comme $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\frac{x}{\|x\|}\|$ et que $\left\{\frac{x}{\|x\|},\, x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} = \mathcal{S}$ on a $\beta = \gamma$. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a $\beta \le \alpha$. Si $x \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ alors $\|x\| \le 1$ et $\|Ax\| \le \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \gamma$. $\|Ax\| \le \gamma$ étant également valable pour $x = 0$ on a $\alpha \le \gamma$ et finalement $\alpha = \beta = \gamma$.

I.3) ⊛ La borne supérieure d'un ensemble borné non vide de valeurs positives est positive, donc l'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- Si $\sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\| = 0$ alors $\forall x \in \mathcal{B}$, $\|Ax\| = 0$ et donc $Ax = 0$. Soit $x \in \mathbb{K}^n \setminus \mathcal{B}$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{B}$ donc $A\frac{x}{\|x\|} = 0$ et donc également $Ax = 0$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $Ax = 0$ et donc $A = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sup_{x\in\mathcal{B}} \|\lambda Ax\| = \sup_{x\in\mathcal{B}} |\lambda|\|Ax\| = |\lambda| \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\|$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall x \in \mathcal{B}$, $\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\| + \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Bx\|$. Donc $\sup_{x\in\mathcal{B}} \|(A+B)x\| \le \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\| + \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Bx\|$.

Finalement $A \mapsto \sup_{x\in\mathcal{B}} \|Ax\| = \sup_{x\in\mathcal{S}} \|Ax\|$ vérifie tous les axiomes d'une norme.

I.4) L'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur le fermé borné $\mathcal{S}$ et donc atteint son maximum.

I.5) L'application $x \mapsto \|I_n x\|$ est constante et vaut 1 sur $\mathcal{S}$.

I.6) Immédiat avec I.2).

I.7) La première inégalité vient de l'inégalité triangulaire. Pour la deuxième inégalité, pour $x \in \mathcal{B}$ on a, d'après la question précédente et par définition de $|||B|||$, $\|ABx\| \le |||A|||\|Bx\| \le |||A||| |||B|||$ qui est donc un majorant de $\|ABx\|$ sur $\mathcal{B}$. Mais $|||AB|||$ est par définition le plus petit majorant.

II Mesure de Lozinskiĭ

II.1) C'est simplement l'homogénéité de la norme subordonnée.

II.2) En appliquant I.7) aux matrices $u^{-1}I_n + A$ et $v^{-1}I_n + A$, il vient $|||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| \le |||(u^{-1} - v^{-1})I_n||| = |u^{-1} - v^{-1}| = u^{-1} - v^{-1}$. On utilise ensuite la question précédente pour conclure.

II.3) ⊛ Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu(A, u) = |||u^{-1}I_n + A||| - u^{-1}$. D'après l'inégalité triangulaire et par homogénéité de la norme subordonnée, $|||u^{-1}I_n + A||| \le u^{-1}|||I_n||| + |||A||| = u^{-1} + |||A|||$. D'autre part, en utilisant I.7) avec $u^{-1}I_n$ et A, on a $u^{-1} - |||A||| = |||u^{-1}I_n||| - ||| - A||| \le |||u^{-1}I_n - (-A)||| = |||u^{-1}I_n + A|||$. Ainsi $u^{-1} - |||A||| \le |||u^{-1}I_n + A||| \le u^{-1} + |||A|||$ et l'on obtient le résultat demandé.

II.4) ⊛ La question II.2) montre que $u \mapsto \mu(A, u)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et la question précédente montre que cette application y est minorée par $-|||A|||$. Le théorème de la limite monotone indique l'existence d'une limite à gauche en 0, et donc la limite demandée existe bien.

B Des courbes pour la lettre C

I Topologie de C

I.1) Voir figure 1. On peut remarquer que $\mathcal{C}$ est une portion d'ellipse.

I.2) (a) ⊛ $\mathcal{C}$ n'est pas ouvert car le point $(-1,0)$, par exemple, n'est pas intérieur à $\mathcal{C}$. En effet, pour tout $r > 0$, $(-1+\frac{r}{2}, 0) \in B((-1,0), r)$, mais $(-1+\frac{r}{2}, 0) \notin \mathcal{C}$. On a même $\mathring{\mathcal{C}} = \emptyset$.

(b) ⊛ $\mathcal{C}$ est l'image du fermé borné $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ par l'application continue γ et est donc fermé borné.

(c) ⊛ Voir sous-question précédente.

(d) ⊛ $\mathcal{C}$ n'est pas convexe car le point $(0,0)$, milieu du segment $[(0,2),(0,-2)]$, dont les deux extrémités sont dans $\mathcal{C}$, n'est pas dans $\mathcal{C}$. Un segment reliant deux points de $\mathcal{C}$ n'a en fait jamais d'autres points dans $\mathcal{C}$.

II Paramétrisation complexe de C

II.1) $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $\rho(t) = \sqrt{1+3\sin^2 t}$.

II.2) Voir figure 2.

II.3) $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, $\tan\theta(t) = 2\tan t$. Si $t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, alors $\tan\theta(t)$ n'est pas défini.

II.4) Voir figure 3.

II.5) Il suffit d'ajouter π sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et 2π sur $\left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$ et de vérifier que tout se raccorde continûment.

On trouve alors $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $\theta(t) = \arctan(2\tan t) + \pi\left\lfloor \frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\right\rfloor$.

II.6) On retrouve bien la figure 1.

II.7) ⊛ On peut proposer le programme suivant :

```python
import numpy as np
from numpy import pi
import pylab as pl

def rho(t):
    return np.sqrt(1 + 3 * (np.sin(t)) ** 2)

def theta(t):
    return np.arctan(2 * np.tan(t)) + pi * np.floor(t / pi + 1 / 2)

parameters = np.arange(pi / 4, 7 * pi / 4, 0.01)
pl.polar(theta(parameters), rho(parameters))
pl.show()
```

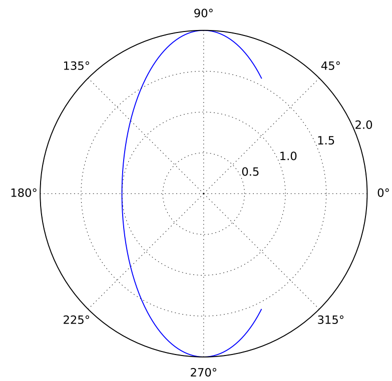


Figure 1 : question I.1), courbe γ :

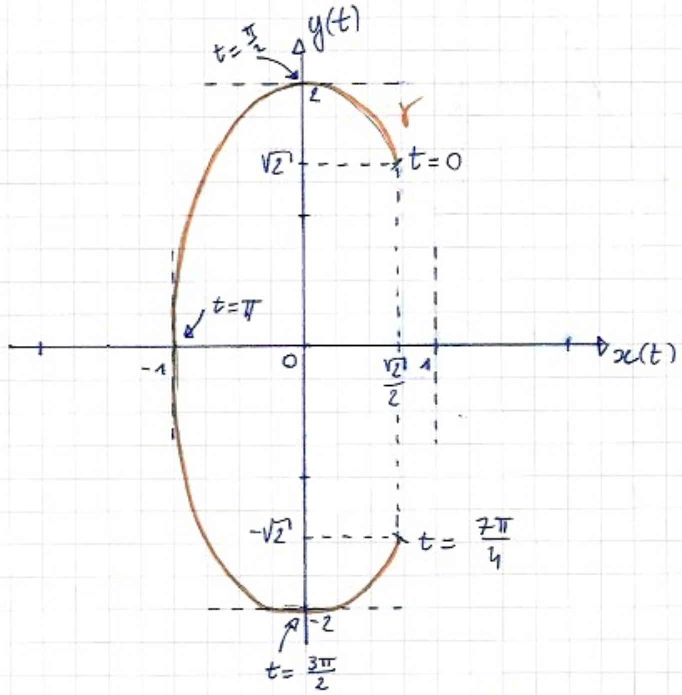


Figure 2 : question II.2), courbe ϕ :

Très joli !

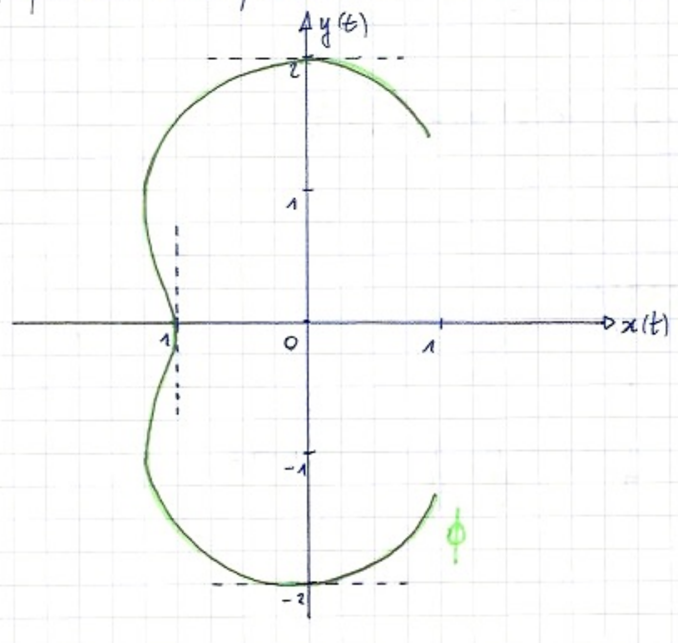


Figure 3 : question II.4), $t \longmapsto \arctan(2 \cdot \tan(t))$

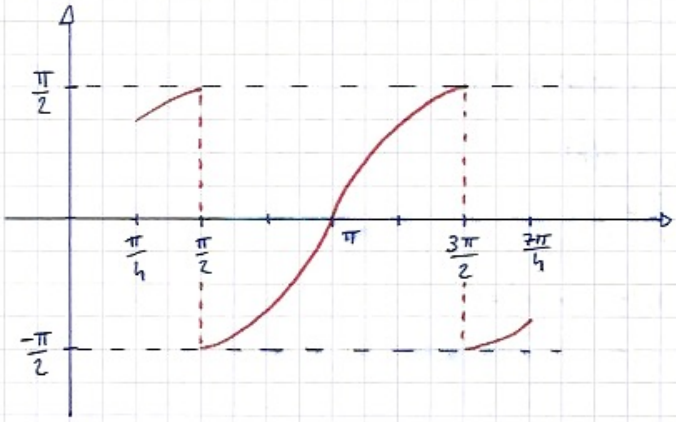


Figure 4 : question III.1), $\alpha(t)$ et $\omega(t)$

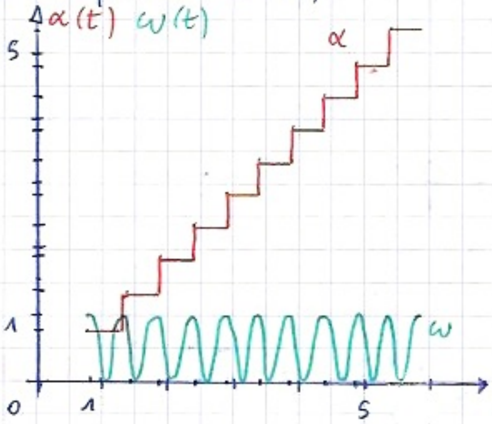
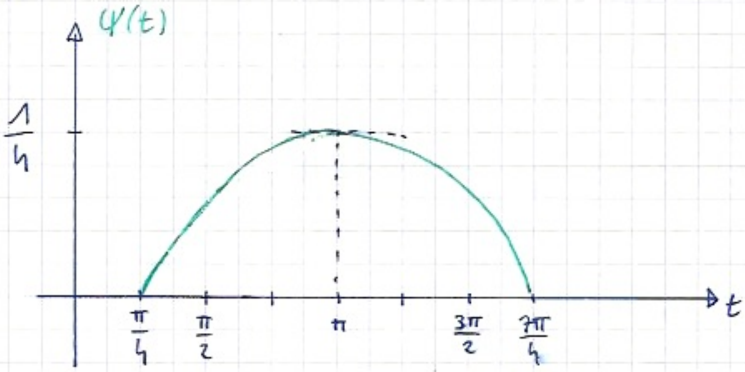


Figure 5 : question III.2), $\Psi(t)$ sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}]$



III Une famille de courbes pour la lettre C

III.1) Voir figure 4.

III.2) Voir figure 5.

III.3) ⊛ Le caractère constant par morceau de la fonction $t \mapsto \alpha(n,t)$, et donc de θ, indique que la courbe doit être une réunion de segments supportés par des droites passant par l'origine. C'est donc la figure D qui est recherchée.

III.4) ⊛ On peut proposer :

```
def alpha(n, t):
    e = np.floor(2 * n / (3 * pi) * (t - pi / 4))
    return pi / 4 + 3 * pi / (2 * n) * e

def omega(n, t):
    return np.cos(2 * n / 3 * (t - pi / 4)) ** 2

def phi(t):
    return (1 / 4) * np.sin((2 / 3) * (t - pi / 4))

def zeta_rho(n, t):
    return rho(t) * (1 + phi(t) * omega(n, t))

def zeta_theta(n, t):
    return theta(alpha(n, t))

params = np.arange(pi / 4, 7 * pi / 4, 1e-3)

from matplotlib import animation

fig = pl.figure()
plots = []
for n in range(10, 200, 10):
    plots.append(pl.polar(zeta_theta(n, params), zeta_rho(n, params), '.'))
anim = animation.ArtistAnimation(fig, plots)
pl.show()
```