DS n° 3

Dans tout le texte, n désigne un entier strictement positif et E un espace euclidien de dimension n, muni du produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, fg désigne la composée $f \circ g$.

On appelle endomorphisme antisymétrique de E tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$$

L'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E est noté $\mathcal{AS}(E)$.

On appelle similitude de E tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrivant λg avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$, où $O(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. On désigne par $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E.

Objectif du problème

Le but du problème est de calculer l'entier d_n défini de la manière suivante[1] :

> d_n est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, c'est-à-dire d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé de similitudes.

A Propriété des endomorphismes antisymétriques

A.1) Montrer que $\mathcal{AS}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

A.2) Montrer que : $f \in \mathcal{AS}(E) \iff \forall x \in E,\ (x|f(x)) = 0$

A.3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f \in \mathcal{AS}(E)$;

(b) la matrice M de f dans une base orthonormale de E est antisymétrique (i.e. $M^T = -M$, où l'on note M^T la transposée de M).

1. On peut démontrer — et nous l'admettrons — que la notation d_n est licite, car cet entier ne dépend effectivement que de la dimension n de E.

A.4) Montrer que si S est un sous-espace vectoriel de E stable par $f \in \mathcal{AS}(E)$, alors $S^\perp$ est également stable par f et que les endomorphismes induits par f sur S et sur $S^\perp$ sont antisymétriques.

A.5) Si $f \in \mathcal{AS}(E)$, montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$, $\mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.

A.6) Soit $f, g \in \mathcal{AS}(E)$, tels que $fg = -gf$. Montrer que :

$$\forall x \in E,\ (f(x)|g(x)) = 0$$

A.7) Que vaut $f^2 = f \circ f$ si f est un automorphisme orthogonal et antisymétrique de E ?

B Étude de $\mathrm{Sim}(E)$

B.1) Montrer que si $u, v \in \mathrm{Sim}(E)$ alors $uv \in \mathrm{Sim}(E)$ et que toute similitude non nulle est inversible.

B.2) Est-ce que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

B.3) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $h \in \mathrm{Sim}(E)$;

(b) la matrice de h dans une base orthonormale de E est colinéaire à une matrice orthogonale.

> On appelle donc matrice de similitude toute matrice colinéaire à une matrice orthogonale : c'est donc la matrice d'une similitude dans une base orthormale.

C Encadrement de d_n.

C.1) Montrer que $d_n \geq 1$.

C.2) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, montrer que $\dim(V) \leq n$. On pourra, pour un certain $x \in E$, considérer l'application $\Phi_x\ :\ f \mapsto f(x)$ de V dans E.

Ainsi $1 \leq d_n \leq n$

C.3) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. Expliciter un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 2, formé de matrices de similitudes. En déduire, avec soin, que $d_2 = 2$.

On admet que si n est impair, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ il existe toujours $x \in E \setminus \{0\}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \mu x$. Autrement dit, en dimension impaire, tout endomorphisme admet au moins une valeur propre.

C.4) Dans cette question seulement, on suppose n impair. Si $f, g \in GL(E)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f + \lambda g$ soit non inversible. En déduire que $d_n = 1$.

Ainsi, si n est impair, $d_n = 1$.

C.5) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, de dimension $d \geq 1$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W de $\mathcal{L}(E)$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$, de même dimension d, et contenant Id_E. On pourra étudier l'image de l'application $\Psi : f \mapsto fg$ avec un endomorphisme g bien choisi.

C'est pourquoi, dans toute la suite, on s'intéressera uniquement à des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$, inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ et contenant Id_E.

D Systèmes anti-commutatifs

Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formé uniquement de matrices de similitude, contenant I_n, et de dimension $d \geq 2$.

D.1) Montrer qu'il existe une base de S de la forme $(I_n, A_1, \ldots, A_{d-1})$, avec pour $i \in [\![1, d-1]\!]$, $A_i \in S$.

D.2) Montrer que pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, $A_i^T + A_i$ est colinéaire à I_n.

D.3) Pour $i \in [\![1, d-1]\!]$, on pose $B_i = A_i + \lambda_i I_n$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on peut choisir $(\lambda_i)_{i\in[\![1,d-1]\!]}$ de telle manière que pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, B_i soit antisymétrique et que $(Id_E, B_1, \ldots, B_{d-1})$ soit une base de S.

On fixe de cette manière une base $(I_n, B_1, \ldots, B_{d-1})$ de S, c'est-à-dire que pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, B_i est antisymétrique.

D.4) Montrer que pour tout $i, j \in [\![1, d-1]\!]$, $B_iB_j + B_jB_i$ est colinéaire à I_n.

D.5) Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^TB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D.6) On considère, dans la suite de cette question, une base $(C_1, \ldots, C_{d-1})$ de $\mathrm{Vect}(B_1, \ldots, B_{d-1})$ orthogonale pour le produit scalaire canonique défini à la question précédente. Montrer que pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, C_i est également antisymétrique et que $\forall i \neq j$, $C_iC_j + C_jC_i = 0$. Que faire pour que chaque matrice C_i soit de plus une matrice orthogonale ?

D.7) Réciproquement, soit $(C_1, \ldots, C_{d-1})$ une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les C_i soient des matrices orthogonales antisymétriques vérifiant pour tous $i \neq j$, $C_iC_j + C_jC_i = 0$. Montrer que $\mathrm{Vect}(I_n, C_1, \ldots, C_{d-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension d, formé uniquement de matrices de similitude.

D.8) Montrer que si $n \geq 2$, on a équivalence entre :
- il existe un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $d \geq 2$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$;
- il existe une famille $(f_1, \ldots, f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques de E vérifiant $\forall i \neq j,\ f_if_j + f_jf_i = 0$.

E Étude pour $n = 2p$ où p est un entier impair

E.1) On suppose qu'il existe une famille $(f_1, f_2, \ldots, f_{d-1})$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ avec $d \geq 3$, telle que les f_i soient des automorphismes orthogonaux, antisymétriques vérifiant $\forall i \neq j$, $f_if_j + f_jf_i = 0$. Soit $x \in E$ de norme 1.

E.1.a) Montrer que $(x, f_1(x), f_2(x), f_1f_2(x))$ est une famille orthonormale

E.1.b) Montrer que $V = \mathrm{Vect}(x, f_1(x), f_2(x), f_1f_2(x))$ est stable par f_1 et f_2.

E.1.c) En déduire que $d_{n-4} \geq 3$.

E.2) Dans cette question on suppose que $n = 2p$ où p est un entier impair. Montrer alors que $d_n = 2$.

— CORRIGÉ DISPONIBLE SUR HTTP://CARNOT.CPGE.INFO —