DS n° 3 : un corrigé

On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y)) \tag{1}$$

A Propriété des endomorphismes antisymétriques

A.1) $\mathcal{AS}(E)$ est non-vide car $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{AS}(E)$. Si $f, g \in \mathcal{AS}(E), \lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x, y \in E$

$$((\lambda f + g)(x), y) = \lambda(f(x), y) + (g(x), y) = -\lambda(x, f(y)) - (x, g(y)) = -(x, (\lambda f + g)(y))$$

et ainsi $\lambda f + g \in \mathcal{AS}(E)$.

A.2) Le sens direct vient avec $x = y$ dans (1). Réciproquement, si f vérifie $\forall u \in E, (u, f(u)) = 0$ alors pour $x, y \in E, 0 = (y - x, f(y - x) = -(y, f(x)) - (x, f(y))$ et donc $f \in \mathcal{AS}(E)$.

A.3) Remarquons que si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée E, la matrice de f dans cette base est $((e_i, f(e_j))_{1 \le i,j \le n}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Si $f \in \mathcal{AS}(E)$, la transposée de M, la matrice de f dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, a pour coefficient (i, j) le scalaire $(e_j, f(e_i)) = -(f(e_j), e_i) = -(e_i, f(e_j))$, qui est l'opposé du coefficient (i, j) de M et donc M est antisymétrique.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et M la matrice de f dans cette base. M étant antisymétrique, on a $\forall i, j \in [\![1, n]\!], (e_i, f(e_j)) = -(e_j, f(e_i))$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ deux vecteurs de E, $(f(x), y) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j (f(e_i), e_j) = -\sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j (e_i, f(e_j)) = -(x, f(y))$, et $f \in \mathcal{AS}(E)$.

A.4) Soit S un sous-espace vectoriel de E stable par f. Soit $y \in S^\perp$, pour tout $x \in S$, on a $(x, f(y)) = -(f(x), y) = 0$ car $f(x) \in S$ et donc $f(y) \in S^\perp$. Cela montre que $S^\perp$ est stable par f. L'égalité (1) est vérifiée pour tout $x, y \in E$ et donc en particulier pour tout $x, y \in S$ et pour tout $x, y \in S^\perp$ et donc les deux endomorphismes induits sont encore antisymétriques.

A.5) Si $f \in \mathcal{AS}(E)$, on a $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0 \iff \forall y \in E,\ (f(x), y) = 0 \iff \forall y \in E,\ -(x, f(y)) = 0 \iff x \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ et donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$. Puisque l'on est en dimension finie $(\operatorname{Im} f) = ((\operatorname{Im} f)^\perp)^\perp = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp = E$.

A.6) Soit $f, g \in \mathcal{AS}(E)$, tels que $fg = -gf$. Pour $x \in E$

$$(f(x), g(x)) = -(x, fg(x)) = (x, gf(x)) = -(g(x), f(x)) = -(f(x), g(x))$$

et donc $(f(x), g(x)) = 0$.

A.7) Si $f \in O(E) \cap \mathcal{AS}(E)$. Soit $y \in E$; pour tout $x \in E$, $(x, y) = (f(x), f(y)) = -(x, f^2(y)) = (x, -f^2(y))$, et donc $y = -f^2(y)$. Ainsi $f^2 = -Id_E$.

B Étude de $\operatorname{Sim}(E)$

B.1) Si $u, v \in \operatorname{Sim}(E)$ alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \exists g, h \in O(E), u = \lambda g, v = \mu h$. On a $uv = \lambda\mu gh$, et comme $\lambda\mu \in \mathbb{R}$ et $gh \in O(E)$, on a bien $uv \in \operatorname{Sim}(E)$. Si u est non nul, alors $\lambda \neq 0$ et u est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda} g^{-1}$.

B.2) $\operatorname{Sim}(E)$ n'est bien sûr pas un sous-espace vectoriel, sauf si $n = 1$. Si $n \ge 2$ considérons par exemple une réflexion $s \in O(E) \subset \operatorname{Sim}(E)$. Si $\operatorname{Sim}(E)$ était un sous-espace vectoriel on aurait $\frac{1}{2}(s + Id) \in \operatorname{Sim}(E)$, mais $\frac{1}{2}(s + Id)$ est un projecteur non trivial, donc ni inversible ni nul, et ne peut donc pas être une similitude d'après la question précédente.

B.3) Il suffit ici quasiment de dire les choses :

(a) $\Rightarrow$ (b) $h \in \operatorname{Sim}(E)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $g \in O(E)$, $h = \lambda g$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, la matrice G de g dans cette base est orthogonale et donc la matrice de h dans cette base, λG, est colinéaire à une matrice orthogonale.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et supposons que la matrice H de h dans cette base s'écrive λG avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $G \in O_n(\mathbb{R})$. G est la matrice d'un endomorphisme orthogonal g et donc $h \in \operatorname{Sim}(E)$.

C Encadrement de d_n.

C.1) $\text{Vect}(Id_E)$ est une droite vectorielle de $\mathcal{L}(E)$ incluse dans $\text{Sim}(E)$ ce qui montre que $d_n \geq 1$.

C.2) Remarquons tout d'abord que $\Phi_x \ : \ f \mapsto f(x)$ est une application linéaire de V dans E. Choisissons $x \in E \setminus \{0\}$, ce qui est possible car $n \geq 1$. Comme toute similitude non nulle est inversible et donc injective, $\forall f \in V \setminus \{0\}, f(x) \neq 0$. Le noyau de Φ_x est donc réduit à l'endomorphisme nul et Φ_x est injective. On a donc $\dim(V) \leq \dim(E) = n$.

C.3) Soit $S = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par la famille libre $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \in S \setminus \{0\}$, alors $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ et A est donc une matrice de similitude. La matrice nulle est aussi une matrice de similitude. Ainsi S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension 2 formé de matrices de similitudes.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et notons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \ : \ f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$ l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $V = f^{-1}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 2, formé de similitudes d'après la question B.3). On a donc $d_2 \geq 2$ et, d'après la question précédente, $d_2 = 2$.

C.4) On a équivalence entre $f + \lambda g \notin GL(E)$ et $fg^{-1} + \lambda Id \notin GL(E)$ puisque g est inversible. Comme $fg^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, le résultat admis nous permet d'obtenir $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $fg^{-1} - \mu Id \notin GL(E)$. Il suffit de prendre $\lambda = -\mu$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \text{Sim}(E)$ de dimension plus grande ou égale à 2 et soit (f, g) une famille libre de V. La famille étant libre, f et g sont deux similitudes non nulles et donc inversibles. On a donc un réel λ tel que $f + \lambda g$ soit non inversible. Comme $f + \lambda g \in V \subset \text{Sim}(E)$, c'est que $f + \lambda g = 0$ ce qui contredit l'indépendance linéaire de f et g. On a donc $d_n \leq 1$ et, par C.1), $d_n = 1$.

C.5) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ inclus dans $\text{Sim}(E)$, de dimension $d \geq 1$. Soit $g \in V \setminus \{0\} \subset GL(E)$, ce qui est possible car $d \geq 1$ et $\Psi : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto fg^{-1}$. Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et c'est même un automorphisme, de réciproque $\Psi^{-1} : f \mapsto fg$. L'image de V, $\Psi(V)$, est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de même dimension d. D'après la question C.2), $\Psi(V) \subset \text{Sim}(E)$. De plus $Id_E = \Psi(g) \in \Psi(V)$. Ainsi $W = \Psi(V)$ vérifie les conditions demandées et répond à la question.

D Systèmes anti-commutatifs

Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formé uniquement de matrices de similitudes, contenant I_n, et de dimension $d \geq 2$.

D.1) Le théorème de la base incomplète permet de compléter la famille libre (I_n) en une base $(I_n, A_1, \ldots, A_{d-1})$ de S.

D.2) Soit $i \in [\![1, d-1]\!]$. On a $(A_i + I_n)^T(A_i + I_n) = A_i^T A_i + A_i^T + A_i + I_n$ et donc $A_i^T + A_i = (A_i + I_n)^T(A_i + I_n) - A_i^T A_i + I_n$. Comme A_i et $A_i + I_n$ (S est un sous-espace vectoriel) sont des matrices de similitudes, elles sont colinéaires à I_n et $A_i^T + A_i$ l'est donc également.

D.3) D'après la question précédente, $\forall i \in [\![1, d-1]\!]$, $\exists \mu_i \in \mathbb{R}$, $A_i^T + A_i = \mu_i I_n$, on pose $B_i = A_i - \frac{1}{2}\mu_i I_n$ (i.e. $\lambda_i = -\frac{\mu_i}{2}$). On a donc $B_i^T + B_i = 0$ et B_i est antisymétrique. On ne change pas le caractère libre d'une famille en ajoutant à un vecteur de la base une combinaison linéaire des autres. La famille $(I_n, B_1, \ldots, B_{d-1})$ est donc une base de S formée de matrices de similitude antisymétriques.

D.4) Si $A = \lambda H$ est une matrice de similitude antisymétrique, $\lambda \in \mathbb{R}, H \in O_n(\mathbb{R})$, comme pour A.7), on a $A^2 = -A^T A = -\lambda^2 H^T H == -\lambda^2 I_n$. Pour $i, j \in [\![1, d-1]\!]$ on peut appliquer cela à B_i, B_j et $B_i + B_j$ (qui est bien dans S et qui reste antisymétrique). Comme $B_i B_j + B_j B_i = (B_i + B_j)^2 - B_i^2 - B_j^2$, et que le membre de droite est donc colinéaire à l'identité, celui de gauche l'est également.

D.5) L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est linéaire par rapport à la première composante par linéarité de la trace. La trace étant invariante par transposition, elle est également symétrique et donc bilinéaire. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $tr(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$ et l'application est positive. Si $tr(A^T A) =$

$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = 0$ alors $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = 0$, $A = 0$ et l'application est bien définie positive. On a bien une forme bilinéaire symétrique définie positive.

D.6) Pour $i \in [\![1, d-1]\!]$, $C_i \in \mathrm{Vect}(B_1, \dots, B_{d-1})$ et est donc antisymétrique. La question D.4) s'applique donc également aux C_i. Pour $i \neq j$, $\mathrm{tr}(C_iC_j + C_jC_i) = 2\,\mathrm{tr}(C_iC_j) = -2\,\mathrm{tr}(C_i^TC_j) = 0$ et donc la matrice $C_iC_j + C_jC_i$, colinéaire à l'identité, est nulle. Comme chaque C_i est une matrice de similitude non nulle, $C_i = \lambda_i H_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$ et H_i in $O_n(\mathbb{R})$. La famille $(H_1, \dots, H_{d-1})$ conserve les propriétés précédentes et est donc est une base de S formée d'automorphismes orthogonaux qui anticommutent deux à deux.

D.7) Posons $S = \mathrm{Vect}(I_n, C_1, \dots, C_{d-1})$ qui est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que la famille $(I_n, C_1, \dots, C_{d-1})$ est libre et forme donc une base de ce sous-espace vectoriel qui sera bien de dimension d. On va en fait même montrer qu'elle est orthogonale pour le produit scalaire canonique, comme à la question précédente. Pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, $\mathrm{tr}(C_i^TI_n) = \mathrm{tr}(C_i^T) = -\mathrm{tr}(C_i) = -\mathrm{tr}(C_i^T) = -\mathrm{tr}(C_i^TI_n)$ et donc $\mathrm{tr}(C_i^TI_n) = 0$. Pour $i,j \in [\![1, d-1]\!]$, avec $i \neq j$, $\mathrm{tr}(C_i^TC_j) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(C_i^TC_j + C_j^TC_i) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(C_iC_j + C_jC_i) = 0$. La famille est donc bien orthogonale, et comme tous ses éléments sont non nuls, elle est libre.
Reste à montrer que $S \subset \mathrm{Sim}(E)$. Soit $A = \lambda_0 I_n + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i C_i \in S$, on a :

$$A^TA = (\lambda_0 I_n - \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i C_i)(\lambda_0 I_n + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i C_i) = \lambda_0^2 I_n - \sum_{1\leq i,j\leq d-1} \lambda_i\lambda_j C_iC_j =$$

Comme $C_iC_j + C_jC_i = 0$, les doubles produits s'éliminent deux à deux et il vient :

$$A^TA = \lambda_0^2 I_n - \sum_{1\leq i\leq d-1} \lambda_i^2 C_i^2 = \lambda_0^2 I_n + \sum_{1\leq i\leq d-1} \lambda_i^2 I_n = (\sum_{0\leq i\leq d-1} \lambda_i^2) I_n$$

et ainsi A est une matrice de similitude. On a ainsi $S \subset \mathrm{Sim}(E)$.

D.8) C'est exactement ce que l'on vient de montrer dans cette partie, reformulé en terme d'endomorphismes. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et, avec la notation de la question C.3), l'existence d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $d \geq 2$ inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ est équivalente à l'existence d'un sous-espace S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $d \geq 2$ formée de matrices de similitudes, ce que l'on obtient en prenant $S = \Phi(V)$ et réciproquement. De la même manière, l'existence d'une famille $(f_1, \dots, f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques de E vérifiant $\forall i \neq j,\ f_if_j + f_jf_i = 0$ est équivalent à l'existence d'une famille $(C_1, \dots, C_{d-1})$ de matrices orthogonales antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i \neq j,\ C_iC_j + C_jC_i = 0$, en prenant, pour $i \in [\![1, d-1]\!]$, $C_i = \Phi(f_i)$. Le sens direct est montré à la question D.6) et l'implication réciproque fait l'objet de la question D.7).

E Étude pour $n = 2p$ où p est un entier impair

E.1.a) Par antisymétrie de f_1 on a $(x|f_1(x)) = 0$ et $(f_2(x)|f_1f_2(x)) = 0$ et par antisymétrie de f_2, $(x|f_2(x)) = 0$, ce qui, comme f_1 est orthogonal, donne aussi $(f_1(x)|f_1f_2(x)) = (x|f_2(x)) = 0$. L'hypothèse de l'énonce implique $f_1f_2(x) = -f_2f_1(x)$, ainsi en utilisant également l'antisymétrie de f_1 et f_2, $(x|f_1f_2(x)) = -(f_1(x), f_2(x)) = (f_2f_1(x), x) = (x, f_2f_1(x)) = -(x, f_1f_2(x))$ et donc $(x|f_1f_2(x)) = 0$ et $(f_1(x), f_2(x)) = 0$. On a bien montré que la famille était orthogonale. De plus, comme f_1 et f_2, et donc f_1f_2, sont orthogonaux, et que x est de norme 1, $(x, f_1(x), f_2(x), f_1f_2(x))$ est une famille normée et donc orthonormée.

E.1.b) Pour montrer que $V = \mathrm{Vect}(x, f_1(x), f_2(x), f_1f_2(x))$ est stable par f_1 il suffit de vérifier que les vecteurs de la famille (qui en est une base) le sont. On a directement $f_1(x) \in V$, $f_1^2(x) = -Id_E(x) = x \in V$, $f_1f_2(x) \in V$ et $f_1^2f_2(x) = -f_2(x) \in V$. Comme $f_1f_2 = -f_2f_1$ on voit de même que V est stable par f_2. On remarque que V est même invariant par f_1 ou par f_2.

E.1.c) Le sous-espace vectoriel V est stable par f_1 et f_2. D'après la question A.4), son orthogonal V^T est encore stable par f_1 et f_2. D'après cette même question, les endomorphismes induits, notés $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$, sont encore antisymétriques. Il est simple de vérifier qu'ils sont également encore orthogonaux et qu'ils anticommutent. Le sens réciproque de l'équivalence de la question D.8), appliquée à V^T de dimension $n-4$ et à la famille $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ permet de conclure que $d_{n-4} \geq d = 3$.

E.2) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et f l'automorphisme orthogonal et antisymétrique représenté dans la base $\mathcal{B}$ par $\begin{pmatrix} 0_p & -I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$. La question D.8) permet donc de conclure en l'existence d'un sous-espace vectoriel inclus dans $\mathrm{Sim}(E)$ de dimension 2. Ainsi, pour tout n pair, $d_n \geq 2$.

Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ que $d_{4q+2} \leq 2$. Le résultat est vrai pour $q = 0$ d'après la question C.3) et la récurrence est initialisée. Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^*$ pour lequel le résultat est vrai pour $q-1$ et considérons un espace euclidien E de dimension $4q+2$. Par l'absurde, supposons que $d_{4q+2} \geq 3$. D'après la question précédente et l'équivalence obtenue en D.8), on aurait $d_{4q-2} = d_{4q+2-4} \geq 3$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. On a donc $d_{4q+2} \leq 2$ ce qui permet d'établir l'hérédité. Le principe du raisonnement par récurrence permet ainsi de conclure et pour tout $p = 2q+1$ impair $d_{2p} \leq 2$.

Pour tout $n = 2p$ avec p impair on a donc $2 \leq d_n \leq 2$ et $d_n = 2$.

— FIN —