DS n° 6

0) Montrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$ on a l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$. On n'hésitera pas à utiliser ce résultat par la suite.

I Préliminaires : la constante γ d'Euler.

On note pour, $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique et $h_n = H_n - \ln n$.

Existence de γ

I.1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in [0,1]$. On pourra utiliser une comparaison série intégrale.

I.2) Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monontone. En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n$.

I.3) Montrer que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.

I.4) Montrer que $\gamma \in [0,1]$.

Calcul approché de γ

I.5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ n \leq x \leq n+1,\ \text{ et } \frac{1}{n+1} \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

Représenter graphiquement D_n dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et montrer que l'aire de D_n est égale à $h_n - h_{n+1}$.

I.6) Montrer que l'aire de D_n est comprise entre $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

I.7) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq h_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$.

I.8) Écrire une fonction `calcul_gamma(epsilon)` en PYTHON permettant d'obtenir γ avec une précision $\epsilon > 0$ donné. On supposera le logarithme népérien déjà chargé, par exemple par `from math import log`.

II La fonction Γ

La fonction Γ d'Euler est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Régularité et propriétés élémentaires de Γ

II.1) Soit $x > 0$. Montrer soigneusement que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi que Γ est bien définie.

II.2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) > 0$.

II.3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.4) Montrer soigneusement que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On citera précisément le théorème utilisé et on justifiera bien toutes les hypothèses.

II.5) Montrer très soigneusement que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de $\Gamma^{(k)}(x)$ sous forme intégrale pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

II.6) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha > 0$. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}dt$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

Expression de Γ comme limite

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f_n(x,\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour $t \in]0,n]$, $f_n(x,t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ et pour $t \in]n;+\infty[$, $f_n(x,t) = 0$.

II.7) Montrer que pour $(n,x,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq f_n(x,t) \leq e^{-t}t^{x-1}$.

II.8) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$$

Formule de Gauss

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du$.

II.9) Justifier que $I_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

II.10) Pour $n \geq 1$, déterminer une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

II.11) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ une expression de $I_n(x)$.

II.12) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$.

Formule de Weierstrass

II.13) En justifiant que $\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xh_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$.

III La fonction Ψ^*

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Psi^*(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, ce qui définit la fonction Digamma.[1]

III.1) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.2) On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer g' comme somme d'une série de fonctions.

III.3) En déduire que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Psi^*(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$.

III.4) Que vaut $\Psi^*(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

III.5) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\Psi^*(x+1) - \Psi^*(x)$ puis montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\Psi^*(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

IV La fonction β

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

Équation fonctionnelle de β

IV.1) Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour $x>0$ et $y>0$.

1. Cette fonction est habituellement plutôt notée Ψ, mais nous prenons quelques libertés.

IV.2) Montrer que pour tous réels $x>0$ et $y>0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

IV.3) Soient $x>0$ et $y>0$. Établir que $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

IV.4) En déduire que pour $x>0$ et $y>0$, $\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$.

Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ la relation $(\mathcal{R})$: $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

IV.5) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour x et $y>1$.

On suppose désormais que $x>1$ et $y>1$.

IV.6) Montrer que $\beta(x,y) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$. On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$.

IV.7) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$.

IV.8) Pour $a \geq 0$, soit $G(a) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}(a(1+u))\,du$. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

IV.9) Montrer que $\lim_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

IV.10) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.11) Exprimer pour $a>0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}.

IV.12) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

Sens de variation de Ψ^*

IV.13) À partir de la relation $(\mathcal{R})$, justifier que $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

IV.14) Établir que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\left(\Psi^*(y) - \Psi^*(x+y)\right)$.

IV.15) Pour $x>0$ fixé, quel est le sens de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$?

IV.16) Montrer que la fonction Ψ^* est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

— CORRIGÉ DISPONIBLE SUR HTTP://CARNOT.CPGE.INFO —