DS n^o 6 — corrigé

0) C'est une inégalité classique de convexité que l'on peut montrer très simplement par l'étude de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $]-1, +\infty[$.

I Préliminaires : la constante γ d'Euler.

Existence de γ

I.1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall k \geq 1,\ \forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$$

En intégrant ces inégalités sur $[k, k+1]$, puis en sommant les résultats obtenus, on obtient

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

Ce qui se réécrit

$$\forall n \geq 2,\ H_n - \frac{1}{n} \geq \ln n \geq H_n - 1$$

D'où l'on déduit

$$\forall n \geq 2,\ 1 \geq h_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

Encadrement qui est également vrai pour $n = 1$.
On peut aussi, dans la comparaison série intégrale partir de l'encadrement valable pour $k \geq 2$ à gauche et $k \geq 1$ à droite

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

En sommant de 2 à n à gauche et en ajoutant 1, et en sommant de 1 à n à droite on trouve alors l'encadrement pour $n \geq 1$

$$1 + \ln n \geq H_n \geq \ln(n+1)$$

Ce qui suffit également à conclure puisque $\ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$.

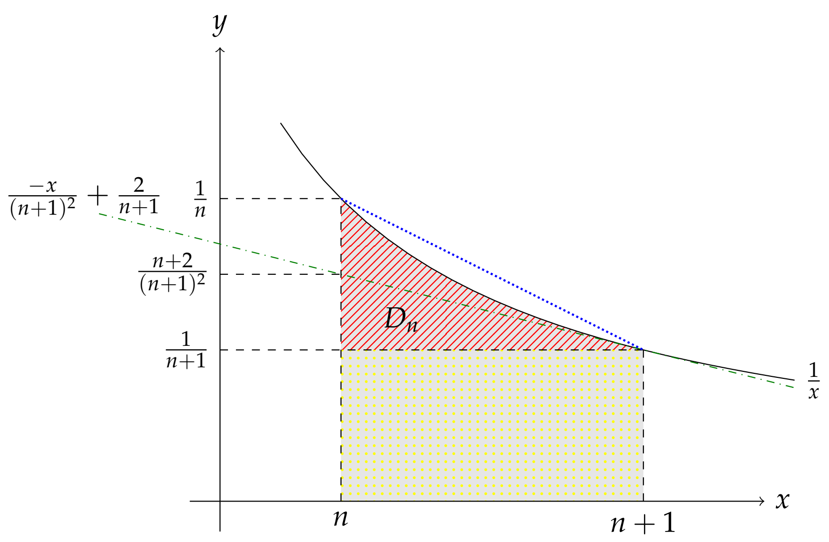

FIGURE 1 – Représentation de D_n.

I.2) Pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Comme pour $n \geq 1$, $-\frac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[$, on a, d'après la question 0),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0) et donc convergente.

I.3) On vient de voir que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ Mais $\gamma + o(1) = o(\ln n)$, et donc $H_n = \ln n + o(\ln n)$, c'est-à-dire $H_n \sim \ln(n)$.

I.4) Simple passage à la limite dans I.1).

Calcul approché de γ

I.5) Dessin à l'appui, l'aire de D_n (hachurée en rouge sur la figure 1) est l'aire sous la courbe (grisée sur la figure 1) à laquelle on retranche le rectangle de hauteur $\frac{1}{n+1}$ (points jaunes sur la figure 1). Ainsi

$$\mathcal{A}(D_n) = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} = h_n - h_{n+1}$$

I.6) On vient de voir que l'aire de D_n était

$$\mathcal{A}(D_n) = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}\right) dx = \int_n^{n+1} \frac{n+1-x}{x(n+1)} dx$$

Un encadrement grossier donne pour tout $x \in [n, n+1]$

$$\frac{n+1-x}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1-x}{x(n+1)} \leq \frac{n+1-x}{n(n+1)}$$

Et en intégrant ces inégalités

$$\left[-\frac{(n+1-x)^2}{2(n+1)^2}\right]_n^{n+1} \leq \mathcal{A}(D_n) \leq \left[-\frac{(n+1-x)^2}{2n(n+1)}\right]_n^{n+1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \mathcal{A}(D_n) \leq \frac{1}{2n(n+1)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq \mathcal{A}(D_n) \leq \frac{1}{2n(n+1)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \leq \mathcal{A}(D_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad (4)$$

Remarquons que l'on peut lire l'encadrement (2) sur la figure 1. L'aire de D_n est inférieure à celle du triangle ayant pour hypoténuse la corde en pointillés bleus et supérieure à celle du triangle ayant pour hypoténuse la tangente en $n+1$, en traits pointillés verts sur la figure 1.

I.7) En sommant les inégalités précédente, on a donc

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \leq \sum_{k=n}^{N}(h_k - h_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Et donc

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \leq h_n - h_{N+1} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(N+1)}$$

Et en passant à la limite

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq h_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$

Et en réordonnant

$$h_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq h_n - \frac{1}{2(n+1)} = h_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$$

I.8) La question précédente indique que $u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n+1)}$ fournit une approximation de γ à $\frac{1}{4n(n+1)}$ près. Si on veut une approximation à ε près, il faut donc prendre n tel que $\frac{1}{4n(n+1)} \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $n = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}}{2} \right\rceil$. On en déduit le programme PYTHON

```python
from math import ceil, sqrt, log

def calcul_gamma(epsilon):
    n = int(ceil((-1 + sqrt(1 + 1 / epsilon)) / 2))
    H_n = sum(1 / k for k in range(1, n + 1))
    h_n = H_n - log(n)
    milieu = (1 / (4 * n * (n + 1)))
    return h_n - (1 / (2 * n)) + milieu
```

II La fonction Γ

Régularité et propriétés élémentaires de Γ

On pose $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto u(x,t) = e^{-t} t^{x-1}$.

II.1) Soit $x > 0$.

- La fonction $u(x,\cdot) : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
- On a $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$.
- On a $t^2\, e^{-t}t^{x-1} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et donc $e^{-t}t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi, par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en 0 et en $+\infty$, $u(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et la fonction Gamma est bien définie pour tout $x>0$.

II.2) Pour tout $x>0$, $u(x,\cdot)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $]0,+\infty[$, et donc $\int_0^{+\infty} u(x,t)dt > 0$. Attention, il faut bien tous les arguments.

II.3) Simple intégration par partie vue en TD.

II.4) Ce sera une conséquence de la question suivante.

II.5) On va appliquer le théorème de convergence dominée du cours [1] dans le cas $\mathcal{C}^\infty$.

- Pour tout $t>0$, $x\mapsto u(x,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,t)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}$.
- Pour tout $x>0$ et pour tout $k\geq 0$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, avec $0<a<b$ et $k\geq 0$

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \begin{cases} |\ln t|^k e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t\leq 1\\ (\ln t)^k e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1\end{cases}$$

Pour $k\geq 0$, notons donc φ_k la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t\leq 1\\ (\ln t)^k e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1\end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux (et même continue).

  - pour $t\in]1,+\infty[$, on a $t^2\varphi_k(t) = t^{1+b}(\ln t)^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparée, d'où $\varphi_k(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
  - Pour $t\in]0,1]$, on a $t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_k(t) = t^{\frac{a}{2}}|\ln t|^k e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\to} 0$, toujours par croissance comparée car $a>0$, donc $\varphi_k(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$, avec $1-\frac{a}{2}<1$.

Donc φ_k est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on en déduit l'hypothèse de domination sur tous les segments de $]0,+\infty[$.

D'après la version $\mathcal{C}^\infty$ du théorème de convergence dominée, dont nous avons bien vérifié toutes les hypothèses, Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)dt = \int_0^{+\infty}(\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}dt$$

II.6) Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u=\frac{t}{\alpha}$ dans l'intégrale définissant Γ assure l'existence de l'intégrale proposée qui vaut $\frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}$.

Expression de Γ comme limite

Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f_n(x,\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour $t\in]0,n]$, $f_n(x,t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ et pour $t\in]n;+\infty[$, $f_n(x,t)=0$.

II.7) La fonction f_n est positive par définition. De plus, si $t\in]0,n[$, $f_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} \leq e^{n\times\left(-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$ d'après la question 0) étant donné que l'on a bien $-\frac{t}{n} > -1$. Enfin, pour $t\in[n,+\infty[$, on a $f_n(t)=0$ mais $e^{-t}t^{x-1}\geq 0$, d'où l'encadrement demandé.

II.8) On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n\geq 1$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $t>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $N\geq t$, par exemple $N=\lfloor t\rfloor+1$. Pour tout $n\geq N$, $t\in]0,n]$, et donc $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-t}$. Ainsi $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $u(x,\cdot)$.

1. À la différence qu'ici on domine toutes les dérivées partielles pour tout $k\geq 0$ et pas uniquement la dernière, ce qui implique leur intégrabilité, hypothèse requise dans le théorème du cours.

- D'après la question précédente, $\forall n \geq 1, \forall t > 0, |f_n(t)| \leq u(x,\cdot)$, et on a déjà vu que $u(x,\cdot)$ était continue, donc continue par morceau, et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

Comme f_n est nulle sur $[n,+\infty[$, cela donne finalement, et cela quel que soit $x > 0$,

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt \underset{n\to+\infty}{\to} \Gamma(x)$$

Formule de Gauss

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du$.

II.9) La fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et en 0 on a l'équivalent $(1-u)^n u^{x-1} \underset{u\to0^+}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, avec $1-x<1$.

II.10) Par une intégration par partie, et en justifiant proprement puisque l'on a affaire à une intégrale généralisée, on trouve

$$I_n(x) = \frac{n}{x}I_{n-1}(x+1)$$

II.11) On a $I_0(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}du = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$. Pour $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{n}{x}I_{n-1}(x+1) \\ &= \frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}I_{n-2}(x+2) \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}I_0(x+n) \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \end{aligned}$$

II.12) Via le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, on obtient

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = n^x I_n(x)$$

Le résultat de la question II.8) se réécrit donc $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x I_n(x)$ et on conclut à l'aide de la question précédente.

Formule de Weierstrass

II.13) On a

$$e^{xh_n} = e^{xH_n}e^{-x\ln(n)} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}}\right)\times\frac{1}{n^x}$$

ce qui justifie l'indication demandée. La formule de Gauss établie à la question précédente donne

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\prod\limits_{k=0}^n (x+k)}{n!n^x} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n^x}\times\frac{\prod\limits_{k=1}^n (k+x)}{\prod\limits_{k=1}^n k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n^x}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

Grâce à l'indication fournie, on réécrit

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} xe^{xh_n}\prod_{k=1}^n\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$$

Or $h_n \underset{n\to+\infty}{\to} \gamma$ et donc, par produit de limites,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$$

III La fonction Ψ^*

III.1) On peut faire un développement limité à l'ordre 2 ou utiliser le résultat de la question précédente, qui donne alors même la limite : la série $\sum\limits_{k\geq1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $g : x \mapsto -\ln(\Gamma(x)xe^{\gamma x})$.

III.2) On pose, pour $k \geq 1$, $g_k : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}$.

- Pour tout $k \geq 1$, la fonction g_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $k \geq 1$, pour tout $x > 0$, $g_k'(x) = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k(k+x)}$. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, avec $0 < a < b$. Pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [a,b]$, $|g_k'(x)| \leq \frac{b}{k^2}$ et, comme $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{b}{k^2}$ converge, on a convergence normale, et donc uniforme, de $\sum\limits_{k\geq 1} g_k'$ sur $[a,b]$.

On en déduit que g est de classe C^1 (ce que l'on savait déjà) et que $\forall x > 0$

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k}\right)$$

III.3) On a vu en III.1) que pour tout $x > 0$

$$g(x) = -\ln\left(\Gamma(x) x e^{\gamma x}\right) = -\ln\left(\Gamma(x)\right) - \ln(x) - \gamma x$$

En dérivant cette relation sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\Psi^* = -g'(x) - \frac{1}{x} - \gamma$, ce qui, en utilisant la question précédente, donne la forme voulue.

III.4) Par téléscopage, $-\gamma = \Psi^*(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

III.5) D'après la formule de la question III.3), on a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\Psi^*(x+1) - \Psi^*(x) &= \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Remarque 1. *On aurait aussi pu procéder ainsi :*

$$\Psi^*(x+1) - \Psi^*(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right)\right).$$

Et utiliser le résultat $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ établit à la question II.3).

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Psi^*(k+1) - \Psi^*(k) = \frac{1}{k}$, et donc pour $n \geq 2$

$$\Psi^*(n) = \Psi^*(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\Psi^*(k+1) - \Psi^*(k)\right) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

IV La fonction β

Équation fonctionnelle de β

IV.1) Pour $x > 0$ et $y > 0$, la fonction $\phi :\ t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$, $\phi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et $\phi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-y < 1$ donc ϕ est intégrable sur $]0,1[$ ce qui montre l'existence de $\beta(x,y)$.

IV.2) Simple changement de variable.

IV.3) Par intégration par partie sur $u(t) = t^x$ et $v(t) = -\frac{(1-t)^y}{y}$, en vérifiant bien que $u(t)v(t)$ a une limite en 0 et en 1, on trouve $\beta(x+1,y) = \frac{x}{y}(\beta(x,y) - \beta(x+1,y))$ ce qui permet ensuite d'arriver à la formule demandée.

IV.4) On applique deux fois la relation de la question précédente, en combinant avec la symétrie de β justifiée plus haut, pour trouver la relation demandée.

Relation entre la fonction β et la fonction Γ

IV.5) Supposons que la relation $(\mathcal{R})$ est vraie pour $x, y > 1$ et soit $x, y > 0$, alors $x+1, y+1 > 0$, donc

$$\beta(x+1,y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{xy\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

et par l'égalité précédente, on a $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

IV.6) Soit $\theta : u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$. θ est C^1 sur $]0,+\infty[$ avec, $\forall u > 0$, $\theta'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$ donc θ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et on a $\lim_{u\to 0^+}\theta(u) = 0$

et $\lim_{u\to+\infty}\theta(u) = 1$. Ainsi le changement de variable $t = \theta(u)$ dans $\beta(x,y)$ donne

$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}$$

ce qui donne la formule demandée.

IV.7) Puisque $x+y-1 > 0$, $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La primitive de cette fonction qui s'annule en 0 est $F_{x,y}\,:\ t \mapsto \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u$. Comme $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $e^{-u}u^{x+y-1} \geq 0$ et que $\Gamma(x+y)$ existe, on a bien $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$.

IV.8) Soit $g\,:\ (a,u) \longmapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)a\big)$. On a

- $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $a \mapsto g(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $F_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $u \mapsto g(a,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car $x-1 > 0$ et $F_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
- $\forall (a,u) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\big|g(a,u)\big| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$ d'après IV.7) et $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ selon IV.4).

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet donc de conclure que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

IV.9) On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$
- $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $g(a,u) \underset{a\to+\infty}{\to} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$
- on a la domination de la question IV.8)

On peut donc intervertir la limite et l'intégrale et donc

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+\infty} G(a) &= \int_0^{+\infty} \lim_{a\to+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)du \\ &= \Gamma(x+y)\beta(x,y)\end{aligned}$$

IV.10) On utilise le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, sur tout segment, en dominant $\frac{\partial g}{\partial a}(a,u) = a^{x+y-1}e^{-(1+u)a}u^{x-1}$ pour $a \in [c,d] \subset \mathbb{R}_+^*, u \in \mathbb{R}^+$ par $d^{x+y-1}e^{-(1+u)c}u^{x-1}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

IV.11) Avec la question précédente et II.6), $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(a) = \Gamma(x)\,a^{y-1}e^{-a}$.

IV.12) À partir de la question précédente, et en exploitant le fait que G est continue en 0 avec $G(0) = 0$, on a $\forall a > 0, G(a) = G(0) + \Gamma(x)\int_0^a t^{y-1}e^{-t}dt = \Gamma(x)\int_0^a t^{y-1}e^{-t}dt$. En prenant la limite quand a tend vers $+\infty$, et avec la question IV.9), on obtient le résultat recherché.

Sens de variation de Ψ^*

IV.13) Immédiat puisque l'on a montré que Γ était $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule pas.

IV.14) Simple calcul.

IV.15) Si $y < y'$ alors $\forall t \in]0,1[$, $t^x(1-t)^y > t^x(1-t)^{y'}$ et donc $\beta(x,y) \geq \beta(x,y')$. Ainsi $y \mapsto \beta(x,y)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.16) La question précédente indique que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) \leq 0$. Comme $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\beta(x,y) > 0$ on en déduit, avec la formule trouvée en IV.14), que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\Psi^*(y) \leq \Psi^*(x+y)$ ce qui veut dire que Ψ^* est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.