Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet avait pour but d'évaluer la dimension maximale d_n des sous-espaces vectoriels V de l'ensemble $Sim(E)$ formé des similitudes sur un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

La première partie permettait de démontrer que $\dim(V) \leq n$ et que V admet une base, orthogonale pour $(f, g) = tr\,(f^* g)$, constituée de l'identité et d'une famille $(f_1, \ldots, f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant, pour $i \neq j$, $f_i f_j + f_j f_i = 0$.

Dans cette partie, on montrait aussi que, si n est impair, $\dim(V) \leq 1$ et $d_n = 1$.

Dans la seconde partie, $n = 2p$, on montrait que, si p est impair, $d_n = 2$. Puis une étude faisait apparaître que $d_4 = 4$. En écrivant E comme somme directe orthogonale de trois sous espaces de dimension 4, on concluait que $d_{12} = d_4 = 4$. Un espace de matrices était alors proposé pour établir que $d_8 = 8$. Enfin, on demandait de conjecturer la valeur de d_n : $d_{2^q(2p+1)} = 2^q$.

Analyse globale des résultats

Le sujet comportait des parties « faciles », découlant directement des définitions ou de théorèmes classiques du cours, notamment les débuts des deux parties. Les « milieux et fins » de ces deux partiesétaient, en revanche, plus difficiles et permettaient de bien sélectionner les bons candidats. Ils exigeaient un effort de réflexion, de compréhension et parfois même d'ingéniosité (I.c.3 , II.c.6 et II.E par exemple).

L'écart-type est très important, plus de la moitié de la moyenne ; ce qui permet à l'épreuve d'être « discriminante ». Les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux. Par contre nous avons aussi vu dans d'autres copies des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base ; par exemple, de nombreux candidats ignorent totalement ce qu'est un sous-groupe.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Au début de la première partie, les résultats découlent directement du cours. La plupart des candidats ne connait pas les définitions élémentaires : groupe, espace vectoriel. Il y a confusion entre le cardinal et la dimension. On voit souvent :

$$\dim(Sim(E)),\ \dim(f,g),\ \dim(base),\ \text{« } V \neq \varnothing \Rightarrow \dim(V) \geq 1 \text{ »},\ \text{etc…}$$

Les candidats doivent savoir qu'il existe des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels :

$GL(E^\circ)$, $Sim(E)$, $O(E)$, avec la conséquence qu'ils n'ont pas de dimension.

Une erreur fréquente à la question I.c.2 :

« $f \in Ker(\Phi) \Rightarrow \forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$ » ; ... facile, mais faux !

La plupart des élèves semble incapable de gérer un raisonnement par équivalence : ils débutent sur des équivalences (plus ou moins bien étayées), puis continuent sur des implications (elles-aussi plus ou moins bien étayées) et enfin terminent sur une équivalence !

À la question I.A.2, lors de la demande d'équivalence entre i, ii et iii, il est judicieux, tant pour le candidat (et surtout pour lui) que pour le correcteur, de préciser l'objet de la recherche ($i \Rightarrow ii$, par exemple). Par ailleurs, il faut toujours se méfier des raisonnements qui tendent à prouver directement une équivalence ($i \Leftrightarrow ii$). Ils conduisent souvent le candidat à ne pas voir une difficulté et à faire un raisonnement faux par négligence. Sauf si l'équivalence est vraiment évidente ($i \Leftrightarrow iii$, dans le cas présent), il vaut mieux décomposer en $i \Rightarrow ii$, puis $ii \Rightarrow i$ ou iii (ce qui constituait la partie « difficile »).

Certains candidats ne font preuve d'aucun esprit critique et « jouent sur les mots » :

« Si f est un automorphisme orthogonal, $\forall x \in E$, $(x, f(s)) = 0$ ».

À la question II.A.1.a :

« La famille $(f_1, \dots, f_{d-1)}$ est orthogonale car les f_i sont des automorphismes orthogonaux ».

La forme a aussi son importance ! Les correcteurs n'ont aucune demande « calligraphique », mais de futurs ingénieurs devaient être capables de fournir un texte lisible, si possible pas trop « truffé » de fautes d'orthographe.

Anecdotique mais désagréable : la plupart des candidats ne numérote pas les feuilles, les questions non plus, d'ailleurs. Le correcteur est souvent perplexe devant un « b) » , tout seul, perdu en début d'une feuille sans aucun repère ! Pour peu que le raisonnement soit lui-même un peu « fumeux », sa patience est mise à rude épreuve !

Enfin, au risque de se répéter, des affirmations du type :

« Il est clair que … », « Il est évident que … », « On voit immédiatement que … »,

pour justifier une proposition qui mérite d'être démontrée, se soldent par un zéro. Aucun point n'est prévu pour récompenser une conviction même si elle semble sincère. Le jury attend qu'on lui apporte une démonstration achevée, cohérente où les arguments soient clairement étayés

Conclusion

Ce sujet a bien rempli son rôle. L'écart-type est particulièrement important et les bonnes copies qui révèlent compréhension, connaissances et « inventivité » conjuguée avec rigueur obtiennent des notes en correspondance avec les qualités manifestées. Les très bonnes copies sont très rares mais le problème permettait aux meilleurs candidats de se distinguer et d'exprimer leur potentiel.