TD 12 : Réduction des endomorphismes

EXERCICE 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 + A + I_n = 0$. Calculer $A^{123456789}$.

EXERCICE 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent (*i.e.* $fg = gf$) et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\operatorname{Im} Q(g)$ et $\operatorname{Ker} Q(g)$ sont stables par $P(f)$.

EXERCICE 3 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une même base $\mathcal{B}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Donner le polynôme caractéristique et le spectre de f.
2. f est-elle trigonalisable ?
3. f est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 4 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geq 2$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{rg} f = 1$ et $\operatorname{rg}(g - Id) = 1$.

1. Montrer que $\chi_f = X^{n-1}(X - \operatorname{tr} f)$.
2. Montrer que $\chi_g = (X-1)^{n-1}(X - \det g)$.
3. Montrer que g est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} g \neq n$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker}(g - Id) \oplus \operatorname{Im}(g - Id) = E$ si et seulement si g est diagonalisable.

EXERCICE 5

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est nilpotent si $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est nilpotent

(ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est strictement triangulaire supérieure (*i.e.* triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls)

(iii) $\chi_f = X^n$

EXERCICE 6 On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables et on considère l'endomorphisme dérivation

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$$

1. Peut-on trouver un polynôme annulateur non nul de f ?
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $u_\lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos \lambda t$. Montrer $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ est libre.

EXERCICE 7 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Trouver le spectre $\mathcal{S}_p(f_A)$ de f_A.
2. Montrer que f_A est trigonalisable si et seulement si A l'est.
3. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

EXERCICE 8

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

— si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que f a au moins une droite stable.

— si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que f a au moins une droite ou un plan stable.

EXERCICE 9 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables.

1. Montrer que f et g commutent (*i.e.* $fg = gf$) si et seulement si f et g sont simultanément diagonalisables (*i.e.* il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(g)$ sont diagonales).
2. En déduire que $f + g$ et fg sont diagonalisables.
3. Que peut-on alors dire de $\mathcal{S}_p(f + g)$ et $\mathcal{S}_p(fg)$?

EXERCICE 10 Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Réduire f au mieux (diagonaliser si possible, sinon trigonaliser).
2. Calculer la dimension du commutant de f, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid fg = gf\}$.
3. Trouver $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$.
4. Calculer $\exp f$.
5. Calculer f^{10}.
6. Trouver toutes les droites stables par f.
7. Trouver tous les plans stables par f.

PROBLÈME 1 *E3A PSI 2016*

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel.

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Le sous-espace $\mathrm{Im}(u)$ est-il stable par l'endomorphisme u ? Justifier la réponse.
2. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E par
$$u(e_1) = e_3,\ u(e_2) = e_4,\ u(e_3) = u(e_4) = 0$$
   (a) Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{rg}(u)$. A-t-on $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$?
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   (c) Ecrire dans une base de $\mathrm{Im}(u)$ la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes. Donner, en le justifiant, l'ordre de multiplicité de chacune de ces valeurs propres dans le polynôme caractéristique.

On identifie le vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ et la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $(X|Y) = {}^tXY$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on choisit un vecteur non nul $V_k \in E_k = \mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_n)$.

5. Montrer que ${}^tM$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et admet les mêmes valeurs propres que M.

On choisit alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ un vecteur W_k non nul de $\mathrm{Ker}({}^tM - \lambda_k I_n)$.

6. Prouver que $\forall i \neq j,\ {}^tV_iW_j = 0$.
7. Démontrer que $\forall i,\ {}^tV_iW_i \neq 0$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k = \frac{1}{{}^tV_kW_k}(V_k{}^tW_k)$.

8. <u>Exemple</u> : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que A possède deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Déterminer les matrices $B_1 + B_2$ et $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.

On revient au cas général.

9. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le rang de B_k. Calculer B_k^2. La matrice B_k est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
10. Déterminer $P = \sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$.
11. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer $G_r = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^r B_k$.