TD 1 : Révision d'algèbre linéaire

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul et E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n.

EXERCICE 1 *Caractérisation des endomorphismes vérifiant* $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g = E$

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$, puis pour que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

EXERCICE 2 *Projecteurs et symétries*

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappeler la définition d'un projecteur.
2. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $Id - p$ l'est aussi. Exprimer alors $\operatorname{Im}(Id - p)$ et $\operatorname{Ker}(Id - p)$ en fonction de $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$.
3. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg}(Id - p) = n$.
4. Montrer que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$ est équivalent à dire que p et q sont deux projecteurs de même noyau. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que p et q aient même image.
5. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et déterminer son image et son noyau.
6. Soit une s une involution de $\mathcal{L}(E)$, *i.e.* $s^2 = Id$. On pose $F = \operatorname{Ker}(s - Id)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + Id)$. Montrer que $F \oplus G = E$, puis que s est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

EXERCICE 3 *Supplémentaire commun*

Soient F et G deux s-e.v. de E.

1. On suppose que F et G ont même dimension. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.
2. On suppose maintenant que $\dim F \leq \dim G$. Montrer qu'il existe deux s-e.v. de E tels que $F \oplus F' = G \oplus G' = E$ et $G' \subset F'$.

EXERCICE 4

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
2. Montrer que

$$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E \end{cases}$$

EXERCICE 5 *Souvenirs pour 5/2 : CCMP PSI 2016*

Montrer que les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$, formés respectivement, des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes, sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(K)$. Quelles sont leurs dimensions ?

EXERCICE 6 *Puissance d'une matrice*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Ker}(u - Id)$ et $\operatorname{Ker}(u + Id)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice D représentant u soit diagonale.
4. Exprimer A en fonction de D.
5. En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

PROBLÈME 1 *E3A PC 2008*

On se propose d'étudier l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}_a : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) \end{array}$$

pour $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_a$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq 3)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_a)$ par la donnée d'une de ses bases.
4. Montrer que $(-1+aX, X^2, X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(\mathcal{A}_a)$.
5. Discuter selon $p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 3$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ solutions de l'équation :

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) = X^p$$

PROBLÈME 2 *E3A PSI 2010*

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. On note respectivement I_n et 0_n la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient A, B, C et D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :

   $$\det(\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}) = \det(D), \det(\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}) = 1 \quad \text{et } \det(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}) = \det(A)$$

   (b) En déduire $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$.
   (c) De la question précédente déduire, $\det(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$.
2. On suppose que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

   À l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que si la matrice D est inversible alors on a

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

   On admet que ce résultat reste valide dans le cas où D n'est pas inversible (on conserve l'hypothèse DC = CD). L'énoncé du concours y consacrait une question qui nécessite des connaissances du programme de cette année.
3. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection des ligne i et colonne j qui vaut 1).
   Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$R_A \ : \ X \mapsto AX \quad \text{ et } \quad L_A : \ X \mapsto XA$$

   Déterminer les matrices de R_A et L_A dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit q un nombre complexe différent de 0 et de 1. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $R_A - qL_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs par

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q^tA \end{pmatrix}$$

5. Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes :
   (a) $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$;
   (b) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix})$;
   (c) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(a+d)^2\right)$.