TD 2 : Séries numériques

EXERCICE 1 *Mise en route*

Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\sum e^{-n} n^{100}$, $\sum e^{-\sqrt{n}} n^{100}$ et $\sum e^{-\ln n} n^{100}$
2. $\sum \frac{n^n}{(\ln n)^n n!}$
3. $\sum \sqrt[3]{n^3 + \alpha n} - \sqrt[2]{n^2 + 5}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\sum \arccos \frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\sum \cos \pi \sqrt{n^2 + n}$

EXERCICE 2

Calculer la somme des séries suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{2^n}; \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}; \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+6}{n^3+5n^2+6n}; \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

EXERCICE 3

Pour $\alpha > 0$, montrer que la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sin \frac{(-1)^n}{k^\alpha}\right)$ converge.

EXERCICE 4

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0\}$. On s'intéresse aux séries $\sum \frac{A(n)}{B(n)}$ et $\sum (-1)^n \frac{A(n)}{B(n)}$.

1. Justifier que ces séries sont bien définies à partir d'un certain rang.
2. Discuter, en fonction de $p = \deg A$ et $q = \deg B$, la nature de ces séries.

EXERCICE 5 *Produit de Cauchy de séries convergentes*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
2. Quelle est la nature de la série produit de Cauchy de u_n et v_n ? Conclusion ?

EXERCICE 6 *Transformation d'Abel*

Soit $\alpha \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$.

1. Quelle est la nature de la série pour $\alpha > 1$?
2. On s'intéresse maintenant au cas $\alpha = 1$. Quelle est la nature de la série si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?
3. On suppose désormais que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta$. Donner une majoration de A_n indépendante de n.
4. En remarquant que $\sin n\theta = A_n - A_{n-1}$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n}$ converge.
5. Montrer qu'il n'y a pas cependant pas convergence absolue. On pourra étudier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n\theta}{n}$.

PROBLÈME 1 *E3A PSI 2009*

Dans ce problème, on établit un résultat général appelé la *règle de Raabe-Duhamel*.
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.
3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
   (c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).
5. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.
6. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.
7. Quelle est la nature de la série de terme général $z_n = \frac{3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$?

La règle de Raabe-Duhamel s'énonce donc de la manière suivante. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle à valeurs strictement positives telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$ pour $n \geq n_0$, alors : si $\lambda < 1$ la série $\sum u_n$ diverge ; si $\lambda > 1$ la série $\sum u_n$ converge ; si $\lambda = 1$ on ne peut rien conclure. Pour ce dernier cas, on peut assez facilement montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^\beta})$ pour $\beta > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge. La règle de Raabe-Duhamel vient donc préciser le cas douteux de la règle de d'Alembert $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$.

EXERCICE 7 *Bonus pour les rapides*

Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{a_n!}$ où a_n est le nombre de chiffres de n dans son écriture décimale ?