TD 3 : Intégrales généralisées

EXERCICE 1 *Vrai ou Faux*

Les énoncés suivant sont-ils justes ? Justifiez vos réponses.

1. L'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{\sin t} dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} |t|^a e^{at} dt$ converge pour tout $a > 0$.
3. Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent alors $\int_I fg$ converge.
4. Si une fonction f continue sur $[1; +\infty[$ vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, alors $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.
5. Soit $a \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(a) > 0$.
6. $\int_0^{+\infty} \frac{E(t)}{t^3} dt$, où E est la fonction partie entière, converge.
7. La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto e^{-x^2}$.
8. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto \int_x^{x^2} f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto f(x^2) - f(x)$.
9. $\int_0^1 (ln(t))^n dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Si f est une fonction continue positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors le reste $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} f(n)$ est équivalent en $+\infty$ à $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt$.

EXERCICE 2

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^{5/2}} dt \quad \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(1/t^2)}{\ln(1+t)} dt \quad \text{(c)} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{(1-t)\sqrt{t}} dt \quad \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \operatorname{sh}(\sqrt{t}) \cos t}{t} dt$$

EXERCICE 3 *Fonction* Γ

Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

1. Quels l'ensemble $\mathcal{D}(\Gamma)$ des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$?
2. Pour $z \in \mathcal{D}(\Gamma)$, montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

La fonction Γ prolonge ainsi la fonction factorielle aux nombres complexes. On peut en fait définir Γ sur l'ensemble du plan complexe sauf aux points {0, -1, -2, -3, ... }, mais cela demande quelques connaissances sur les fonctions analytiques complexes.

EXERCICE 4 *Comparaison série-intégrale*

Pour les questions suivantes, on pourra penser à une comparaison série-intégrale.

1. Pour $\alpha > 1$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$
Étudier, en fonction de la valeur de α, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$.
2. Étudier
$$\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{\frac{n}{k}}}{k^2}$$

3. Justifier son existence et calculer
$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$$

EXERCICE 5 *Encore un peu de comparaison série-intégrale*

On considère la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}$

1. Donner la nature de la série de terme général
$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n)$$
2. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?
3. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}$?

EXERCICE 6

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ intégrable sur $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t) dt = 0$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nt) f(t) dt = 0$.

EXERCICE 7

Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $[0; +\infty[$. Montrer que $(f')^2$ est également intégrable sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 8 *Critère de d'Alembert version intégrale*

Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue positive. On suppose que :
$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0; 1[$$
Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

PROBLÈME 1 *E3A MP 2015*

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe. On admet alors que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.
2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application $t \mapsto \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que : $\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \frac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. On note, $\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}$:
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx} dt$$
   (a) Montrer que I est réelle.
   (b) Soit $A > 0, B > 0$. Rappeler pourquoi l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx$ existe. Montrer que :
$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx = \frac{\cos AB}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$
   (c) En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque.
   (d) En déduire le calcul de l'intégrale I.