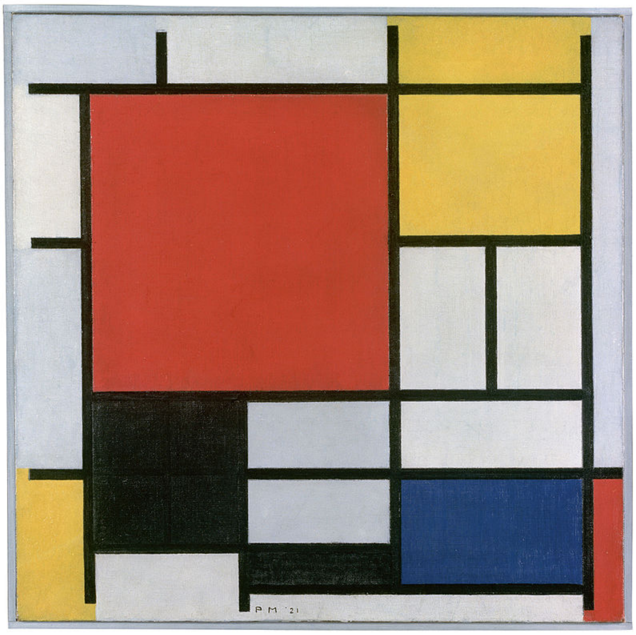
TP n°18 : Méthode des rectangles



Composition en rouge, jaune, bleu et noir, Piet[1] MONDRIAN, 1921, huile sur toile, 59,5 × 59,5 cm.

1 Méthode des rectangles

✓

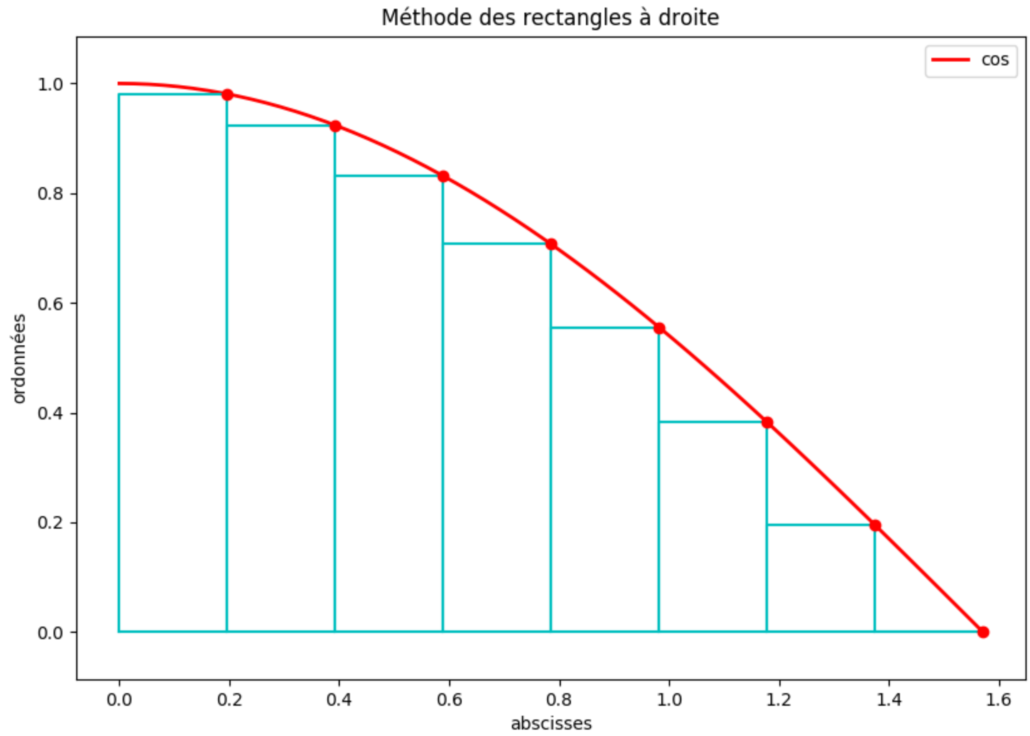
Il faut absolument essayer de *retrouver* les formules du cours, au brouillon, dessin à l'appui. Une fois et une seulement une fois cette étape effectuée, vous pouvez aller vérifier que vos formules sont correctes.

De la même manière, il faut implémenter la méthode en PYTHON à partir de la formule, et ne consulter la solution dans le cours que pour vérifier votre[2] proposition.

1. Implémenter une fonction qui calcule une approximation de $\int_a^b f(t)dt$, prenant en argument une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, deux flottants a, b avec $a < b$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la méthode des rectangles à gauche avec une subdivision de taille n.
2. Tester pour $\int_0^{\pi/2} \cos t dt$ dont vous savez calculer la valeur exacte.
3. On rappelle que si $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]$ est une liste d'abscisses et si $y = [y_1, y_2, \dots, y_k]$ est une liste d'ordonnées, l'appel `plt.plot(x, y, style)` permet de dessiner une ligne brisée passant par les points $\left((x_j, y_j)\right)_{j \in [\![1,k]\!]}$ avec le style donné. Pour dessiner un point on peut prendre par exemple des listes de taille 1 avec comme style `"ro"`, où `"r"` est pour la couleur rouge et `"o"` pour dessiner un disque sur les points sans lignes entre les points. On remarquera qu'un rectangle est une ligne brisée bien choisie. Attention, pour tracer une fonction, il convient de prendre suffisamment de points, par exemple 10^6, pour avoir une courbe bien lisse.

1. Pour ceux qui aiment les langages exotiques, vous pouvez essayer de refaire ce TP avec le langage PIET. Voir par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Piet.
2. Il y a de très nombreuses possibilités, toutes aussi justes les unes que les autres.

Écrire une fonction qui permet d'obtenir le graphe suivant :



2 Logarithme népérien

Nous souhaitons reprogrammer la fonction logarithme népérien à partir des opérations arithmétiques de base. Pour cela, nous utilisons la relation

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

4. Définir la fonction `ln` qui calcule le logarithme népérien par la méthode des rectangles à droite avec 1000 rectangles.
5. Tracer sur un même graphique votre fonction `ln` et la fonction `log` de la bibliothèque `numpy` et comparer.

En pratique, c'est le logarithme en base 2 qui est programmé directement dans le processeur et qui est utilisé pour en déduire les logarithmes dans les autres bases.

3 D'après un oral de Centrale 2016

On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \times \cos(t)) dt$

6. Définir la fonction f en PYTHON en utilisant la méthode du point milieu et un pas de 10^{-2}.
7. Tracer la fonction sur $[0, 10]$.

4 Retour sur la charge et décharge d'un condensateur

Dans cette section, on reprend la partie I du TP n° 17 sur la charge et décharge d'un condensateur. On rappelle que les mesures ont été faites avec $R = 10\ k\Omega$, $C \approx 100\ nF$ et $E = 7.44\ V$. Pour la charge du condensateur, on a considéré le condensateur initialement déchargé, donc $u_C(0) = 0$.

8. Écrire une fonction `tension_cond(temps, intensite, init, C)` qui, à partir des listes des temps et des intensités, de la valeur initiale de la tension `init` et de la capacité C du condensateur, renvoie la liste `tension` contenant les tensions aux bornes du condensateur pour tout instant. Elles seront calculées par intégration numérique par une des méthodes des rectangles au choix.

On rappelle que, pour un condensateur, on a la relation $i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$.

9. Superposer sur un même graphe le tracé de la tension aux bornes du condensateur obtenue par intégration numérique et celle que vous avez récupérée dans le fichier de mesures. Qu'en pensez-vous ?

10. Écrire une fonction `energie_joule(temps, intensite, init, R)` permettant de calculer l'énergie dissipée par effet Joule au cours du temps. On procèdera par intégration numérique et on considérera que $E_{Joule}(0) = 0$.

On rappelle que l'on a la relation $P_{Joule}(t) = Ri^2(t)$ *et la relation* $P_{Joule}(t) = \frac{dE_{Joule}(t)}{dt}$.

11. Représenter alors le bilan énergétique de la charge du circuit RC. Vérifier la conservation de l'énergie.

On rappelle que l'énergie stockée aux bornes du condensateur s'écrit à tout instant :

$$E_{elec}(t) = \frac{1}{2}C(u_C^2(t) - u_C^2(0))$$

et que l'énergie fournie par le générateur s'écrit :

$$E_{gene}(t) = CE(u_C(t) - u_C(0))$$

5 Durée d'une année

Le temps nécessaire pour décrire une fraction d'ellipse dans un champ de force en K/r^2 s'écrit

$$t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0 - \frac{K}{r}\right) - \frac{C^2}{r^2}}} dr$$

On donne :

- $K = -G \cdot M_T \cdot M_S$ avec $G = 6,67203 \cdot 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻², $M_T = 5,9742 \cdot 10^{24}$ kg et $M_S = 1,98909 \cdot 10^{30}$ kg.
- Périhélie : $r_1 = a(1-e)$, aphélie : $r_2 = a(1+e)$ avec $e = 0.0167176$ et $a = 1,496 \cdot 10^{11}$ m.
- $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_T} + \frac{1}{M_S}$, $E_0 = \frac{K}{2a}$ et $C^2 = \frac{|K|a(1-e^2)}{\mu}$.

Les flottants sont à entrer avec la notation scientifique : par exemple, pour G : `6.67203e-11`.

12. Calculer la période de rotation de la Terre autour du soleil entre le périhélie et l'aphélie et commenter