TP n°20 : Méthode par dichotomie

1 Préliminaires : résolution d'une équation du second degré

Dans cette section, on va mettre en évidence le problème que peut poser la comparaison exacte d'un flottant à 0 en cherchant à résoudre explicitement une équation du second degré.

1. Écrire une fonction `solutions(a, b, c)` qui renvoie la liste des solutions réelles (ou plutôt flottantes) de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. La liste sera vide si le discriminant est strictement négatif, réduite à un élément si le discriminant est exactement égal à 0, et composée de deux éléments si le discriminant est strictement positif.
2. Essayer avec $a = 0.1$, $b = 0.2$ et $c = 0.1$ et vérifier en calculant les solutions à la main.
3. Essayer avec $a = 0.01$, $b = 0.2$ et $c = 1$ et vérifier en calculant les solutions à la main. Qu'en pensez-vous ?
4. Proposer une solution pour palier ce problème. On pourra remarquer que le problème se pose lorsque $\Delta = b^2 - 4ac \approx 0$, c'est-à-dire $b^2 \approx 4ac$. Pour $\epsilon > 0$, plutôt qu'un critère absolu $\Delta \approx 0$ lorsque $|\Delta| \leq \epsilon$, on peut choisir un critère relatif $|\Delta| = |b^2 - 4ac| \leq \epsilon b^2$. Vérifier sur les exemples précédents avec $\epsilon = 10^{-10}$.

2 Méthode par dichotomie

2.1 Résolution de $f(x) = 0$

5. Implémenter une fonction `zero(f, a, b, epsilon)` qui renvoie un zéro à ϵ près d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, telle que $f(a)f(b) \leq 0$, en utilisant une approche par dichotomie. On ne *recopiera* pas la fonction du cours : on cherchera, dessin à l'appui, à la *retrouver*. On vérifiera que les deux conditions sont vérifiées et on renverra `None` si ce n'est pas le cas.
6. Vérifier avec la fonction $x \mapsto x - 1$ sur $[0, 2]$, sur $[2, 4]$ et sur $[2, -2]$.
7. Peut-on utiliser cette méthode pour retrouver les racines des deux équations de la section précédente en utilisant cette fonction ?

8. Résoudre l'équation $e^x + x = 0$ avec une précision de 10^{-15}.
9. Donner une approximation de $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-n} près pour $n \in \{1, 5, 10, 15\}$. Vérifier.
10. On considère la fonction $f : x \mapsto (x-2)^2 - 1$ dont les racines sur $[0,4]$ sont 1 et 3. Réfléchir un instant et deviner la valeur qui sera renvoyée par la fonction `zero`, *puis* vérifier.

2.2 Résolution de $f(x) = c$

11. Écrire une fonction `resoudre(f, c, a, b, epsilon)` qui renvoie une solution approchée à ϵ près de l'équation $f(x) = c$ sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, en supposant vérifiée une certaine condition sur $f(a)$, $f(b)$ et c que l'on précisera.
    Conseil : être astucieux et paresseux !
12. Retrouver la valeur de $\ln 2$ en résolvant l'équation $e^x = 2$ avec la fonction précédente.

2.3 Problème de terminaison

13. À l'aide de la fonction `zero` trouver une approximation du nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, solution positive de l'équation $x^2 - x - 1$, à 10^{-16} puis à 10^{-17} près. Expliquer.
14. Pour éviter le problème précédent, on peut limiter le nombre d'itérations à une certaine valeur. Modifier la fonction `zero` pour qu'elle prenne un argument `max_iter` supplémentaire constituant une limite d'itérations à ne pas dépasser. Si cette limite est atteinte, la fonction doit s'arrêter et renvoyer `None`. Attention, ce n'est pas la fonction du cours qui utilisait comme critère d'arrêt un nombre d'itérations fixées comme objectif. Vérifier la validité de votre fonction avec la question précédente.

2.4 Utilisation de la bibliothèque `scipy.optimize`

S'il est utile et important de programmer soi-même la fonction de résolution par dichotomie afin de bien comprendre son fonctionnement, il est intéressant, dans la pratique, d'utiliser une implémentation éprouvée et optimisée, qui a déjà été testée maintes fois. La bibliothèque `scipy.optimize` dispose de la fonction `bisect` qui implémente la recherche du zéro d'une fonction en utilisant la méthode par dichotomie.

15. Allez lire la documentation de cette fonction disponible ici :

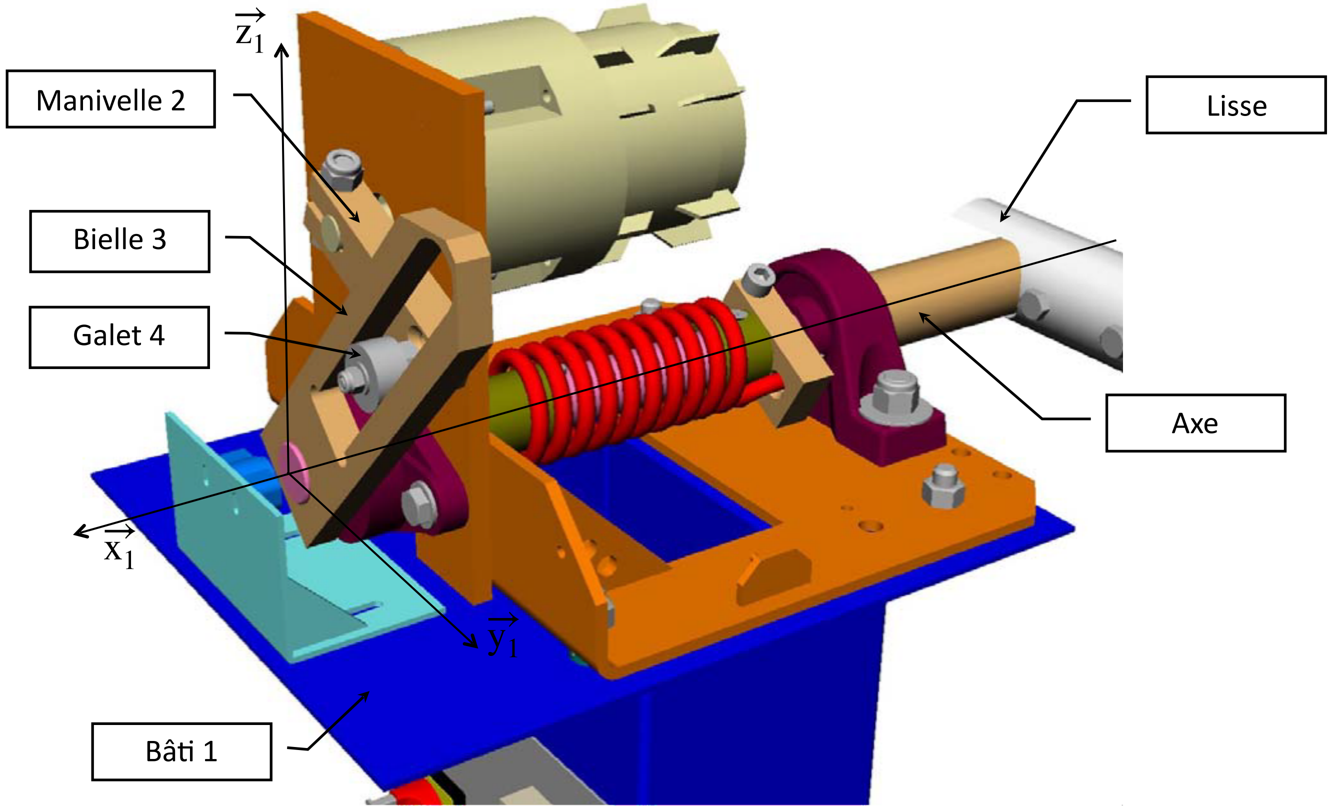
    https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.bisect.html

    À quoi correspondent les arguments `f`, `a`, `b`, `xtol`, `rtol` et `maxiter` ?

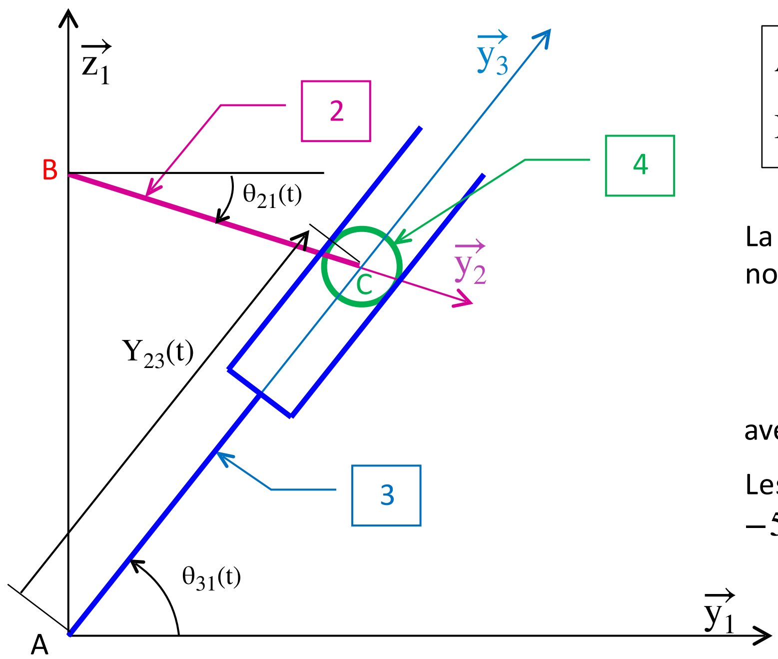
2.5 Tracé du résidu

16. Tracer, en fonction du nombre n d'itérations la valeur du résidu $r_n = |f(c_n)|$ pour la fonction $x \mapsto (2 + \sin x)(1 - e^{x-2})$ sur $[0, 5]$, pour une dizaine d'itérations. Commenter.
17. Plutôt que de renvoyer la valeur du point milieu c, on pourrait renvoyer le point x pour lequel la valeur $f(x)$ est minimale parmi toutes les valeurs calculées jusqu'à présent. Implémenter cette variante et en profiter pour minimiser le nombre d'appels à f comme dans le cours. Superposer sur le graphique précédent le tracé du résidu avec cette amélioration et commenter.

3 Mécanisme de transformation de fermeture d'une barrière autoroutière



Le schéma ci-dessous donné le paramétrage de ce mécanisme.



$AB = H = 112$ mm	
$BC = R = 81$ mm	

La fermeture géométrique de ce mécanisme nous conduit à l'équation suivante :

$$\tan\theta_{31} = \frac{H + R\,.\,\sin\theta_{21}}{R\,.\,\cos\theta_{21}}$$

avec $45° \leq \theta_{31} \leq 135°$

Les contraintes technologiques imposent $-50° \leq \theta_{21} \leq +230°$.

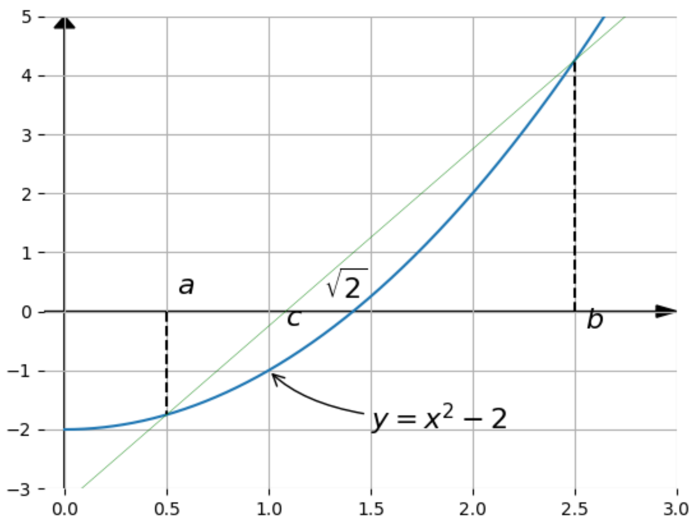
On souhaite déterminer les angles $\theta_{21_{min}}$ et $\theta_{21_{max}}$ correspondants aux positions extrêmes du système (barrière fermée et barrière ouverte). Cette résolution n'est pas évidente sans un moyen numérique de calcul. On souhaite écrire un programme Python capable de résoudre ce problème.

18. Écrire un programme Python permettant de déterminer les angles $\boldsymbol{\theta}_{21_{\mathbf{min}}}$ et $\boldsymbol{\theta}_{21_{\mathbf{max}}}$ en utilisant la méthode de résolution numérique par dichotomie.

4 Méthode de la fausse position

La méthode de la fausse position (*regula falsi*), une expression qui date du 17e siècle, désigne une variante de la méthode de dichotomie qui utilise une meilleure estimation de la nouvelle abscisse, plutôt que de prendre le point $c = \frac{a+b}{2}$ exactement au milieu.

À chaque itération de l'algorithme, on sait que la racine x^* se trouve dans le segment $[a, b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$. Les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b)$ se trouvent donc de part et d'autre de l'axe des abscisses. La corde qui relie ces deux points coupe l'axe des abscisses en un point $c \in [a, b]$, qui a plus de chance d'être proche de x^* que le milieu $c = \frac{a+b}{2}$. On procède ensuite exactement comme pour la méthode de dichotomie pour réduire l'intervalle de recherche à $[a, c]$ ou à $[c, b]$, selon le signe de $f(a)f(c)$ et on construit implicitement les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



19. Calculer les coordonnées de c en fonction de a, b, $f(a)$ et $f(b)$.
20. Implémenter la méthode de la fausse position.
21. Appliquer la méthode avec la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$. Afficher les valeurs successives de a, b et c. À la main, faire tourner l'algorithme pour quelques itérations, sur un dessin.
22. À la main, comprendre ce qui se passe pour la fonction $x \mapsto x$ sur $[-1, 1]$.

On pourrait utiliser un critère d'arrêt $|f(x)| \leq x^*$ sur la valeur de l'ordonnée. Comme on peut considérer que c est, à chaque étape, une estimation de x^*, on peut aussi s'arrêter dès que deux estimations successive de c sont suffisamment proches l'une de l'autre, plus précisément lorsque $|c_n - c_{n-1}| \leq \epsilon$.

23. Modifier votre fonction pour utiliser ce dernier critère d'arrêt. Attention aux cas $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ qu'il faut correctement gérer.
24. Vérifier avec la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$
25. Pour $\epsilon = 10^{-15}$, combien d'itérations sont nécessaires pour approcher la solution de l'équation $x^2 = \cos x$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ avec la méthode de la fausse position ? Comparer avec la méthode par dichotomie.