Devoir surveillé nº 02 — corrigé

EXERCICE 1 Le mot aba a comme

1. préfixes : $\{\epsilon, a, ab, aba\}$
2. suffixes : $\{\epsilon, a, ba, aba\}$
3. facteurs : $\{\epsilon, a, b, ab, ba, aba\}$
4. sous-mots : $\{\epsilon, a, b, ab, aa, ba, aba\}$

EXERCICE 2 On a les équivalence avec une expression régulière linéaire :

1. $(\epsilon|a|a^2)^* \equiv a^*$
2. $\varnothing \cdot a \equiv \varnothing$
3. $\epsilon a \equiv a$
4. $\epsilon|a|a^2|a^3a^* \equiv a^*$
5. $\epsilon|(a|b)^* \equiv (a|b)^*$
6. $(a^*b)^*a^* \equiv (a|b)^*$

EXERCICE 3 L'ensemble des préfixes d'un langage local est un langage local et la preuve est la même (en plus simple) que celle pour les facteurs que nous avons vu en cours. Notons $\hat{L}$ le langage des préfixes des mots de L. On a alors $P(\hat{L}) = P(L)$, $S(\hat{L}) = \Sigma(L)$ et $F(\hat{L}) = F(L)$. Considérons un mot $u = u_1u_2 \ldots u_n$ avec $n \geq 1$, de première lettre dans $P(L)$, de dernière lettre dans $\Sigma(L)$ et dont tous les facteurs sont dans $F(L)$. Il faut montrer que $u \in \hat{L}$. Comme $u_n \in \Sigma(L)$, il existe $v, w \in \Sigma^*$ tel que $vu_nw \in L$. Montrons que $uw \in L$ ce qui montrera que u est préfixe d'un mot de L donc dans $\hat{L}$. La première lettre de uw est celle de u donc dans $P(L)$, sa dernière lettre est celle de u_nw donc celle de vu_nw donc dans $S(L)$ et ses facteurs sont soit ceux de u, donc dans $F(L)$, soit ceux de u_nw donc des facteurs de vu_nw donc dans $F(L)$. Comme L est local on conclut que $uw \in L$.

EXERCICE 4 On propose les expressions régulières suivantes :

1. $b^*(\epsilon|a)b^*$
2. $\Sigma^*(ab|ba)\Sigma^*$
3. $(aa|b)^*$
4. $(\Sigma^3)^*(\Sigma|\Sigma^2)$
5. $\Sigma^*(aa|bb)\Sigma^*$
6. $(\epsilon|b)(ab)^*(\epsilon|a)$

EXERCICE 5 On trouve une expression régulière qui dénote ce langage avec une disjonction de cas sur la parité mutuelle de n et m : $(aa)^*(bb)^*|a(aa)^*b(bb)^*$.

EXERCICE 6

1. On a $L^2 = \{uv \mid u, v \in L\} \subseteq L$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, L^n \subseteq L$. Comme $\epsilon \in L$, on a aussi $L^0 \subseteq L$. Finalement $L^* \subseteq L$ et l'inclusion réciproque est toujours vraie.
2. On a $G(L) = \{ab, baa\}$ et ce langage n'est évidemment pas stable par concaténation.
3. Comme $G(L) \subseteq L$ on a $G(L)^* \subseteq L^* = L$. Pour l'inclusion réciproque, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'un mot $u \in L$ de longueur n est dans $G(L)^*$. Pour $n = 0$, $u = \epsilon \in G(L)^*$. Supposons le résultat vrai pour un rang $n \in \mathbb{N}$ et soit $u \in L$ avec $|u| = n + 1$. Si $u \in G(L)$ alors $u \in G(L)^*$. Sinon, il existe deux mots non vides $v, w \in L$ tels que $u = vw$. Par hypothèse de récurrence, puisque les mots v et w sont de longueur au plus n, on a $v, w \in G(L)^*$ et donc $u \in G(L)^*$.
4. Considérons le langage dénoté par l'expression régulière $e = (a^*b)^*$. Comme cette expression régulière est linéaire le langage $L = L(e)$ est local et comme $L = L^*$ il est stable par concaténation. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le mot a^nb est un générateur de L et donc $G(L)$ est infini.