Partie Automates probabilistes

Question 12. L'état initial n'est pas acceptant donc $\Pr(\varepsilon) = 0$.

Seul le chemin $q_0 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1$ est acceptant pour le mot `0`, donc $\Pr(\texttt{0}) = \dfrac{1}{4}$.

Les chemins acceptants pour le mot **`010`** sont $q_0 \xrightarrow{\texttt{0}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1$ et $q_0 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1$ donc

$$\Pr(\texttt{010}) = \frac{3}{4} \times 1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Question 13. Nous allons montrer que $\displaystyle\sum_{\rho \text{ chemin pour } u} \Pr(\rho) = 1$, ce qui prouvera l'égalité demandée.

Comme le suggère l'énoncé, raisonnons par récurrence sur $|u|$.

- Si $|u| = 0$ alors $u = \varepsilon$ et le seul chemin pour u est le chemin ρ de longueur nulle, pour lequel $\Pr(\rho) = 1$.
- Si $|u| > 0$, on note $u = av$ où a est la première lettre de u. On note $Q_0 = \left\{q \in Q \;\middle|\; \Pr(q_0 \xrightarrow{a} q) > 0\right\}$, et, pour tout $q \in Q_0$, on considère l'automate $\mathcal{A}_q = (Q, q, F, \Pr)$.

  Un chemin pour u est un chemin $\rho_u = (q_0 \xrightarrow{a} q) \circ \rho_{v,q}$ où $q \in Q_0$ et $\rho_{v,q}$ est un chemin pour v dans l'automate $\mathcal{A}_q$. Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $q \in Q_0$, $\displaystyle\sum_{\rho_{v,q}} \Pr(\rho) = 1$ donc :

  $$\sum_{\rho_u} \Pr(\rho_u) = \sum_{q \in Q_0} \Pr(q_0 \xrightarrow{a} q) \times \sum_{\rho_{v,q}} \Pr(\rho_{v,q}) = \sum_{q \in Q_0} \Pr(q_0 \xrightarrow{a} q) = 1$$

  donc le résultat est bien acquis pour le mot u.

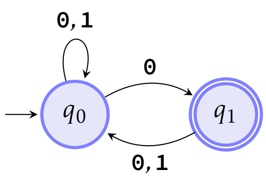
Question 14. Les mots u vérifiant $\Pr(u) = 0$ sont les mots pour lesquels il n'existe pas de chemin acceptant pour u ; ce sont les mots qui ne se terminent pas par le caractère `0` (donc le mot vide et les mots se terminant par `1`).

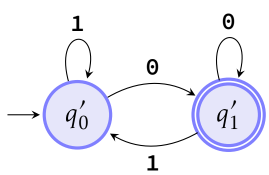
Les mots pour lesquels $\Pr(u) = 1$ sont les mots pour lesquels tout chemin pour u est acceptant dans l'automate ci-dessus ; il n'en n'existe pas car le chemin qui stationne en q_0 est un chemin non acceptant pour tout mot u.

Question 15. Les langage des mots u vérifiant $\Pr(u) > 0$ est le langage des mots qui se terminent par la lettre `0` ; il est décrit par l'expression rationnelle $(\texttt{0} + \texttt{1})^*\texttt{0}$.

Question 16. À tout automate probabiliste $\mathcal{A}$ on associe l'automate non déterministe $\mathcal{A}' = (Q, \{q_0\}, F, \delta)$ où la fonction de transition δ est définie par $\delta(q, a) = \left\{q' \in Q \;\middle|\; \Pr(q \xrightarrow{a} q') > 0\right\}$. Alors $\Pr(u) > 0$ si et seulement si u est accepté par $\mathcal{A}'$, car pour tout chemin $\rho = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$, $\Big(\Pr(\rho)) > 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \Pr(q_{i-1} \xrightarrow{a_i} q_i) > 0\Big)$.

Question 17. La construction suivante conduit à l'automate non déterministe dessiné à gauche, puis à sa déterminisation dessinée à droite :





avec $q'_0 = \{q_0\}$ et $q'_1 = \{q_0, q_1\}$.

Question 18. Si L est un langage rationnel, il existe un automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \delta)$ qui le reconnait. On définit alors l'automate probabiliste $\mathcal{A}' = (Q, q_0, F, \Pr)$ en posant $\Pr(q, a, q') = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta(q,a) = q' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a $u \in L \iff \Pr(u) = 1$, donc $L = \mathcal{L}_\eta(\mathcal{A}')$ pour tout $\eta \in [0, 1[$. L est bien stochastique.

Question 19. On calcule $\Pr(q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ et on a $\frac{1}{16} = \underline{0,\texttt{0001}}_2$.

Question 20. Le seul chemin acceptant pour **10** est $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1$ donc $\Pr(\texttt{01}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \underline{0,\texttt{01}}_2$.

Question 21. Le mot **1101** possède 5 chemins acceptants :

- $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{0}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$ de probabilité 1/8 ;
- $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$ de probabilité 1/8 ;
- $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$ de probabilité 1/16 ;
- $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$ de probabilité 1/4 ;
- $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$ de probabilité 1/8

donc $\Pr(\texttt{1101}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{11}{16} = \underline{0,\texttt{1011}}_2$.

Question 22. Les deux questions précédentes laissent penser que $\Pr(u) = \underline{0,\tilde{u}}_2$ où $\tilde{u}$ est l'image miroir du mot u. Montrons-le en raisonnant par récurrence sur $|u|$.

– Si $|u| = 0$ alors $u = \varepsilon$ et $\Pr(u) = 0 = \underline{0,}_2$ puisque q_0 n'est pas un état final.

– Si $|u| > 0$, posons $u = va$ où a est la dernière lettre de u et supposons le résultat acquis pour le mot v. Considérons alors un chemin ρ_u acceptant pour u.

- Si $a = \texttt{0}$, la dernière transition est nécessairement $q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1$ et $\rho_u = \rho_v \circ (q_1 \xrightarrow{\texttt{0}} q_1)$ où ρ_v est une transition acceptante pour v.

  Dans ce cas on a donc $\Pr(u) = \frac{1}{2} \times \Pr(v) = \underline{0,\texttt{0}\tilde{v}}_2$.
- Si $a = \texttt{1}$, la dernière transition est ou bien $q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$, auquel cas $\rho_u = \rho_v \circ (q_1 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1)$ où ρ_v est une transition acceptante pour v, ou bien $q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1$, auquel cas $\rho_u = \rho_v \circ (q_0 \xrightarrow{\texttt{1}} q_1)$ où ρ_v est une transition non acceptante pour v.

  D'après la question 13, on a : $\Pr(u) = 1 \times \Pr(v) + \frac{1}{2} \times (1 - \Pr(v)) = \frac{1}{2} \times (1 + \Pr(v)) = \underline{0,\texttt{1}\tilde{v}}_2$.

Dans les deux cas on obtient bien $\Pr(u) = \underline{0,\tilde{u}}_2$.

Question 23. L'égalité demandée résulte immédiatement des définitions et du résultat de la question précédente :

$$\mathcal{L}_\eta(\mathcal{A}_1) = \left\{u \in \Sigma^* \,\middle|\, \Pr(u) > \eta\right\} = \left\{u \in \Sigma^* \,\middle|\, \underline{0,\tilde{u}}_2 > \eta\right\} = \left\{a_1 \cdots a_n \in \Sigma^* \,\middle|\, \underline{0,a_n \cdots a_1}_2 > \eta\right\}.$$

Question 24. Si $0 \leqslant \eta < \eta' < 1$ on a bien évidemment $\mathcal{L}_{\eta'}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{L}_\eta(\mathcal{A}_1)$. De plus, cette inclusion est stricte. En effet, puisque les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$, il existe un tel nombre d dans l'intervalle $[\eta, \eta'[$. Posons $d = \underline{0,d_1 \cdots d_n}_2$ et considérons le mot $u = d_n \cdots d_1$. Alors $u \in \mathcal{L}_{\eta'}(\mathcal{A}_1) \setminus \mathcal{L}_\eta(\mathcal{A}_1)$.

De ceci il résulte qu'il existe un nombre non dénombrable de langages stochastiques sur l'alphabet $\Sigma = \{\texttt{0},\texttt{1}\}$. Or pour un alphabet donné l'ensemble des langages rationnels est dénombrable : pour s'en convaincre, il suffit de constater que l'ensemble $\mathscr{A}_p$ des automates finis déterministes à p états est fini donc l'ensemble $\mathscr{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathscr{A}_p$ des automates finis déterministes est dénombrable.

Il existe donc parmi les langages stochastiques $\mathcal{L}_\eta(\mathcal{A}_1)$ des langages qui ne sont pas rationnels.